

中学・高校入試でどんだけ頑張ったかがそれなりに問われてしまう大学入試

2005年度 北海道大学

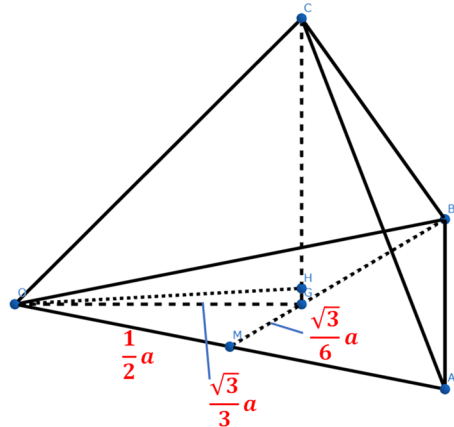
半径1の球に内接する正四面体の1辺の長さを求めよ。



【解答例】中学生でもたぶんギリ理解できる方法

正四面体の1辺の長さを  $a$  とする。

図で、 $\triangle OAB$  において、3点  $O, A, B$  から等しい距離にある点を  $G$  とすると（点  $G$  は  $\triangle OAB$  の重心となる）、4点  $O, A, B, C$  から等しい距離にある点  $H$  は、 $CG$  上にある（ $CG \perp \triangle OAB$ ）。



$OA$  の中点を  $M$  とする。

$$OM = \frac{1}{2}a, \quad MG = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$OG = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

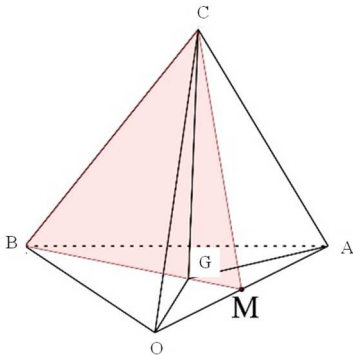
$$CG = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} \cdot a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$OH (= \sqrt{HG^2 + OG^2})$  は球の半径だ

$$\text{から, } \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - 1\right)^2 + \frac{1}{3}a^2 = 1$$

整理して、 $a^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}a = 0$ ,  $a\left(a - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = 0$ ,  $a > 0$  より、 $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

※1<点  $G$  とは何者なのか>



正三角形  $OAB$  において、

$OG = AG$  のとき、 $\triangle OAG$  は二等辺三角形だから、 $OA$  の中点を  $M$  とすると、 $BM \perp OA$ 、 $GM \perp OA$  となり、3点  $B, G, M$  は同一直線上にある。同様に、 $AB$  の中点を  $M'$ 、 $OB$  の中点を  $M''$  とすると、3点  $O, G, M'$  も、3点  $A, G, M''$  も同一直線上にある。よって、点  $G$  は重心である（ちなみに、正三角形の場合は、外心、内心、重心、垂心が一致する）。

は、外心、内心、重心、垂心が一致する）。

## ※2<CG⊥△OABの理由>

CG⊥△OAB のとき（直角三角形の斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいから）  
△CBG≡△COG≡△CAG となる。BG=OG=AG となるから、※1 より、  
点 G が重心のとき、CG⊥△OAB

### 【コメント】

意外に正答率低かったと思われます。

大学入試で出題される空間図形（数3の積分も含む）は、中学・高校入試でいかに空間図形と触れ合ったかが試されています。高校生になると忙しくて呑気に数学やっている暇なんてないんです，空間図形をやっているくらいなら他にやることたくさんあります。物理とか化学とか英語とか。中学・高校入試で勉強した空間図形の解き方は，大学入試でも大いに活きます。すぐ身につくものでもないのでもし二次試験でこういう問題が出題されたら，結構なアドバンテージです。

※1～※2 こういうことを知っている前提で出題されたのが，2019 年度福島県の <https://hokkaimath.jp/blog-entry-231.html> です。大学入試で出されても違和感ないですね，そしてたぶん大学入試でも正答率かなり低いと思われます。

ちなみにベクトルを用いた解法もあります。他サイト。

<http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/kakomon/2005/05hokudai05.htm>

<https://stchopin.hatenablog.com/entry/2020/06/15/192018>

後者は正四面体の重心(正四面体の場合は各頂点からの距離が等しい点)P について， $\overrightarrow{OP} = 1/4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ を明らかとして用いていますが，どうなのでしょう。北大なら許されるか？

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>