

正攻法は何なのか平面図形

範囲：中3 平面図形

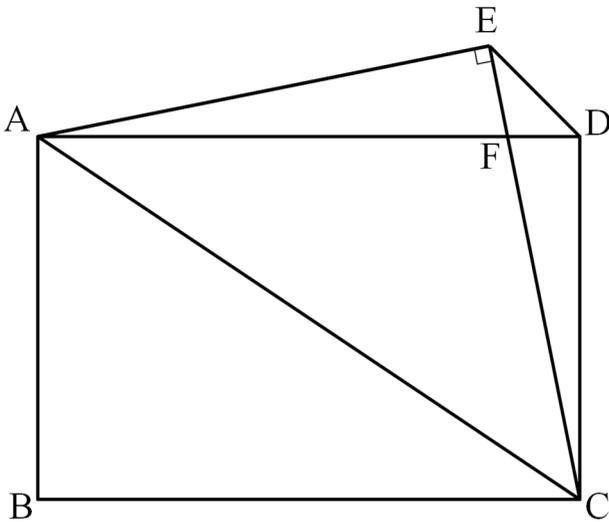
難易度：★×5

得点

/20

出典：2011 年度 徳島県

下の図のように、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $BC=8\text{ cm}$ の長方形 $ABCD$ と、長方形 $ABCD$ の対角線 AC を斜辺とする直角二等辺三角形 EAC がある。辺 EC と辺 AD の交点を F とし、線分 ED をひく。(1) ~ (4) に答えなさい。



- (1) $\triangle EAF \sim \triangle DCF$ を証明しなさい。
- (2) 辺 EC の長さを求めなさい。
- (3) $\triangle FAC$ の面積を求めなさい。
- (4) 線分 ED の長さを求めなさい。

【解答例】**(1) (6点)**

△EAF と △DCF において、

対頂角は等しいから、 $\angle EFA = \angle DFC \dots\dots \textcircled{1}$

仮定より $\angle AEF = 90^\circ$, また長方形の内角だから $\angle CDF = 90^\circ$ なので、
 $\angle AEF = \angle CDF = 90^\circ \dots\dots \textcircled{2}$

①, ②より、2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle EAF \sim \triangle DCF$

(2) (4点)

$$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad EC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

(3) (6点)

AF = x と置くと DF = 8 - x, CF = y と置くと FE = $5\sqrt{2} - y$

△EAF ∼ △DCF より、

$5\sqrt{2} : 6 = x : y = (5\sqrt{2} - y) : (8 - x)$ 都合の良いように整理して、

$$\begin{cases} 6x = 5\sqrt{2}y \dots\dots \textcircled{1} \\ 30\sqrt{2} - 6y = 40\sqrt{2} - 5\sqrt{2}x \dots\dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \textcircled{1} \text{より、} y = \frac{3\sqrt{2}}{5}x, \textcircled{2} \text{に代入して}$$

$$5\sqrt{2}x - \frac{18\sqrt{2}}{5}x = 10\sqrt{2} \quad x = \frac{50}{7}$$

$$\text{よって、} \triangle FAC = \frac{1}{2} \times \frac{50}{7} \times 6 = \frac{150}{7} \text{ cm}^2$$

(4) (4点)

$\angle AEF = \angle CDF$ より、4点 E, A, C, D は同一円周上にあるので、

△FAC ∼ △FED となる。

$$(3) \text{より、} FA = \frac{50}{7}, \quad FD = \frac{6}{7}, \quad \text{また、} FC = \frac{3\sqrt{2}}{5} \times \frac{50}{7} = \frac{30\sqrt{2}}{7}, \quad FE = \frac{5\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{50}{7} : \frac{5\sqrt{2}}{7} = 10 : ED \quad \mathbf{ED = \sqrt{2} \text{ cm}}$$

【コメント】

解き方は色々あると思われませんが（たぶん）(3) は大人しく連立方程式を作った方が速い気がします。今回は、数値もそこまで複雑ではありません。2020年度大分県：<https://hokkaimath.jp/blog-entry-176.html> のような激ヤバ問題なら話別ですが.....。方程式の係数に $\sqrt{\quad}$ が入っていると大半の中学生の戦意を喪失させることができます。やっていることは簡単だけど。

※ (3)

$$5\sqrt{2} : 6 = x : y = (5\sqrt{2} - y) : (8 - x) \text{は,}$$

$$5\sqrt{2} : 6 = x : y, \quad 5\sqrt{2} : 6 = (5\sqrt{2} - y) : (8 - x) \text{と同じ意味。}$$

※ (4)

同一円周上は何の前触れも無しに来ることが多いです。

【メールフォームで貰った中学生らしい別解】

(3) $\triangle FAC = S$ とすると、 $\triangle EAF = 25 - S$
 $\triangle EAF \sim \triangle DCF$ で、面積比は $EA^2 : DC^2 = 50 : 36 = 25 : 18$ だから、

$$\triangle DCF = \frac{18}{25}(25 - S), \quad \triangle DCF + \triangle FAC = \frac{1}{2} \text{長方形 ABCD より,}$$

$$S + \frac{18}{25}(25 - S) = 24, \quad \frac{7}{25}S = 6 \quad S = \frac{150}{7} \text{ cm}^2$$

(4)

$$(3) \text{より, } \triangle EAF = \frac{25}{7}, \quad \triangle DCF = \frac{18}{7}, \quad \triangle FAC : \triangle DCF = \frac{150}{7} : \frac{18}{7} = 25 : 3$$

$$\text{より, } AF : FD = 25 : 3, \quad \text{よって } \triangle DEF = \frac{3}{25} \times \frac{25}{7} = \frac{3}{7}$$

$\triangle DEF \sim \triangle CAF$ で、面積比 $150 : 3 = 50 : 1$ となるから相似比は $5\sqrt{2} : 1$

$$ED = \frac{1}{5\sqrt{2}}AC = \frac{1}{5\sqrt{2}} \times 10 = \sqrt{2} \text{ cm}$$

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>