

ひらめく難問小問集合

範囲：私立小問集合

難易度：★×6

得点

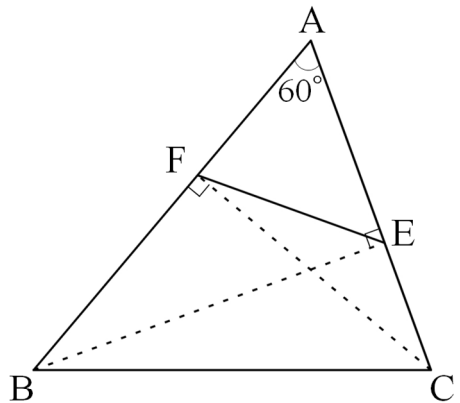
/20

出典：2014年度 巣鴨高校

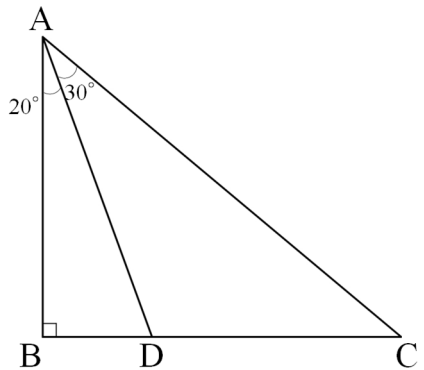
次の各問いに答えよ。(計算過程も書くこと)

- (1) a, b を整数とする。 $\sqrt{2}(a+b-1) = a-b-5$ を満たすとき、 a, b の値を求めよ。
- (2) 正の整数 A, B がある。 A に 15 を、 B に 39 を加えた数をそれぞれ分子、分母にもつ分数は、 A を分子に B を分母にもつ分数 Q に等しい。分数 Q を既約分数の形で求めよ。
- (3) 区別のつかないカード 4 枚を箱 A, B, C に入れる入れ方は何通りあるか。ただし、3 つの箱 A, B, C には何枚入れてもよく、また、空き箱があってもよい。

- (4) 右図のような $\angle A = 60^\circ$ である鋭角三角形 ABC において、頂点 B, C から対辺に下ろした垂線の足を E, F とする。 $BC = 3$ であるとき、線分 EF の長さを求めよ。
- (5) 右図のような $\angle B$ が直角である直角三角形 ABC がある。点 D を辺 BC 上にとると



- $\angle DAB = 20^\circ$,
 $\angle CAD = 30^\circ$ になった。
 $BD = 1, DC = a$ であるとき、線分 AD の長さを a を用いて表せ。



【解答例】

(1) (4点)

$a+b-1$, $a-b-5$ も整数となり, $\sqrt{2}$ は無理数だから,
 $a+b-1=0 \dots \dots$ ①となる。よって, $a-b-5=0 \dots \dots$ ②
①, ②を連立した方程式を解いて, $a=3, b=-2$

(2) (4点)

条件より, $\frac{A+15}{B+39} = \frac{A}{B}$, $B(A+15) = A(B+39)$, $15B = 39A$, $\frac{A}{B} = \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$

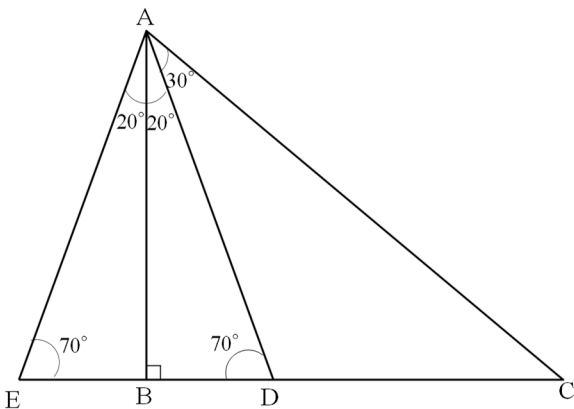
(3) (4点)

箱 B, C に入れる枚数を (箱 B, 箱 C) と表す。
箱 A が 0 枚のとき, (4, 0) (3, 1) (0, 4) の 5 通り
箱 A が 1 枚のとき, (3, 0) (0, 3) の 4 通り
同様に, 箱 A が 2 枚のとき 3 通り, 箱 A が 3 枚のとき 2 通り, 箱 A が 4 枚のとき 1 通りとなるから, $5+4+3+2+1=15$ 通り

(4) (4点)

$AE = \frac{1}{2}AB$, $AF = \frac{1}{2}AC$, $\angle A$ 共通より, $\triangle ABC \sim \triangle AEF$, $EF = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}$

(5) (4点)



直線 CB の延長上に,
 $\angle DAB = \angle EAB$ となる点 E をとると,
 $\angle CEA = \angle CAE = 70^\circ$ となり, 二等辺三角形の頂角の二等分線は, 底辺を垂直に二等分するから,
 $EB = DB = 1$
 $CA = CE = 2 + a$

また, $\angle ADB = 70^\circ$ より, $\triangle AED \sim \triangle CAE$ となるので, $AD = AE = x$ とすると, $2 : x = x : (2+a)$, $x^2 = 4 + 2a$, $x > 0$ より, $x = \sqrt{4 + 2a}$

【コメント】

いかにも難関私立の小問集合ですが、テクニックどころより、閃きが求められます。中学校の対策だけじゃ絶対に無理ですね、塾通ったり、それ用の問題集解いたりしないと厳しい。

(1) は高校生なら余裕で解けますね。知っているか知っていないかです。一度経験すれば中学生でも余裕で解けますが、大半の普通の中学生は経験がありません。

(2) は解いてください。基本。

(3) は焦らず書き出すのが良いでしょう。A, B, C と3つあるので、 $A = 0$ のとき……と場合分けできると良いですね。

(4) はすぐ相似と気づけるか。有名な図形です。立川高校でも類題が出題されています。 <https://hokkaimath.jp/blog-entry-28.html>

(5) はこういう自分で三角形作る系の補助線引いた経験が無いと絶対に解けませんね。練習あるのみ。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>