気分的な大学入試問題 4
出典：2004 年度　センター試験 2B　三角関数

※現行過程に合わせ，rad 表記にしている。radwimps ではない。

αを，$0 < a < \pi$を満たす角度とする。$0 \leq \theta \leq \pi$の範囲で，関数

$$f(\theta) = \sin(\theta - a) - \sin\theta$$

を考える。以下，$\boxed{\text{シ}}$〜$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{タ}}$には，あてはまるものは，選択肢の⓪〜⑦から選べ。

【選択肢】

⓪ $\frac{\pi}{3}$	① $\frac{\pi}{4}$	② $\frac{\pi}{3}$	③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2}{3}\pi$	⑤ $\frac{3}{4}\pi$	⑥ $\frac{5}{6}\pi$	⑦ π

(1)　方程式$f(\theta) = 0$ 解は，aを用いて，

$\theta = \boxed{\text{シ}} + \frac{a}{2}$ と表される。さらに，この解θが，

$\sin(\theta - a) = \frac{1}{2}$を満たすならば，$a = \boxed{\text{ス}}$である。

(2)　aを(1)で求めた角度とするとき，関数$f(\theta)$は，

$\theta = \boxed{\text{セ}}$のとき，最大値$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{2}$，

$\theta = \boxed{\text{タ}}$のとき，最小値$-\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$である。

【解説】

(1)

$f(\theta)=0$のとき，$\sin(\theta-a)=\sin\theta\cdots$①

$0<a<\pi$，$0\leq\theta\leq\pi$より，①の解は，

$\theta+(\theta-a)=\pi$　となり，$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}+\frac{a}{2}$

このとき，

$$\sin(\theta-a)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}=\frac{\pi}{6}$　となるから，$a=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$

(2)

$a=\frac{2}{3}\pi$のとき，

$$f(\theta)=\sin\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)-\sin\theta$$

$$=\sin\theta\bullet\left(-\frac{1}{2}\right)-\cos\theta\bullet\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sin\theta$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{3}{2}\sin\theta=-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$$

$$=-\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

となり，

最大値は，$\theta=\boldsymbol{\pi}$のとき，$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

最小値は，$\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$のとき，$-\boldsymbol{\sqrt{3}}$

となる。

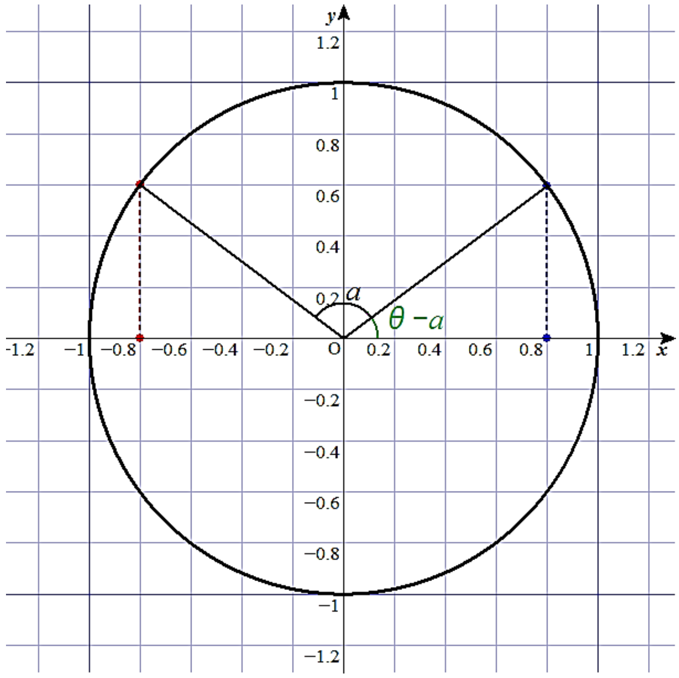
【コメント】

最初が一番難しい問題。（その後の問題は公式を適用するだけ。）そのため点差がかなりついてしまう。そしてたぶん，作問者は，最初を「基本中の基本。」と思っている。いや基本だけどさ。

地味に$-\sqrt{3}$でくくるの注意。

たぶん基本的にちゃらんぽらんに簡単な三角関数が，少し変な問題出ると平均点が下がる。2004年度は，過去3番目に低い45.65点であった。作問者は反省文。

(1) 解説の図



$0<a<\pi$，$0\leq\theta\leq\pi$より，図で考えるとこれしかありえない。（30°＋150°＝180°のように。）（一般化して考える必要なし。）

なお，万が一思いつかなかった場合，

和積公式（何と滅多に使われない公式をここで使える……。方程式の基本は因数分解に基づく。）

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots$①

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cdots$②

①−②より，

$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

$\alpha+\beta=\theta-a$，$\alpha-\beta=\theta$とすると，

$\alpha=\theta-\frac{a}{2}$，$\beta=-\frac{a}{2}$となり，

$$\sin(\theta-a)-\sin\theta=2\cos\left(\theta-\frac{a}{2}\right)\sin\left(-\frac{a}{2}\right)=0$$

とすると，$\theta=\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}$　となる。

その他逆算方法とかも無いわけでは無い。今回の問題の場合，

$\theta=\boxed{\text{シ}}+\frac{a}{2}$を，$f(\theta)=0$に代入すると，楽。

果たして新センターでそんなのが出るかは不明だが……。

【作成者】https://hokkaimath.blog.fc2.com/