気分的な大学入試問題 2

出典：2005 年度　慶應義塾大学　整数問題

　$25m+17n=1623$ を満たす正の整数の組（m, n）を全て求めなさい。

【コメント 1】

（ https://hokkaimath.blog.fc2.com/blog-entry-35.html#more）で，「単純に係数をくくる方法」がいかに簡単で強力かを説明しました。ユーグリッド，mod を理解していなくでも簡単に不定方程式の解を見つけることが出来ます。今回の問題も，その一例です。

【解答例】

$25m+17n=1623$ は，$25m+17n-1623=0$ と変形でき，17 でくくると，

$17(m+n-95)+8m-8=0$　すなわち，

$17(m+n-95)+8(m-1)=0$…①となる。

①を満たす（m, n）の組は，$m=1$，$n=94$ とすぐ分かる。

すると，

$25m+17n=1623$…②

$25\cdot 1+17\cdot 94=1623$…③

②－③より，

$25(m-1)+17(n-94)=0$

$25(m-1)=-17(n-94)$

25 と 17 は互いに素だから，k を整数とし，

$m-1=-17k$　$m=-17k+1$…④

$n-94=25k$　$n=25k+94$…⑤

ここで，m，n は正の整数であるから，④より，$k\leqq 0$ となる。一方，⑤より，$k>-4$ となるから，$k=-3$，-2，-1，0 となる。したがって，求める（m, n）の組は，

（m, n）＝ **（1, 94）（18, 69）（35, 44）（52, 19）**

【コメント 2】

まだ高校数学において整数問題が流行っていない頃の問題です。（教科書にあまり載っていなかった？）しかし，難関大学では昔から解かなくてはならなかったのですね。大変。

「全て求めなさい。」と言われると，大抵は k を整数とし，これを満たすもの全て，と言いがちな解答が多いですが，これは違います。k に制限があるのですね。良い問題です。

【コメント 3】

よくある解答として，

$25m+17n=1$ とし，$m=-2$，$n=3$ の解を見つけ，1623 倍するというのがありますが，流石に 1623 倍する気力はありません。

【コメント 4】

①はたまたま，8 で括れているじゃないか！というコメントもあると思われます。

$17(m+n-95)+8m-1=0$　だったらどうでしょう？

$17(m+n-95)+8m=1$

$17\times(-7)+8\times 15=1$ より，

$m=15$，$n=87$ とすれば，解が出ます。簡単で誰でも理解できる解法ですが，案外有能ですね。

（3 桁程度の倍数は即座に計算できる脳が必要ですが……。）

【作成者】https://hokkaimath.blog.fc2.com/