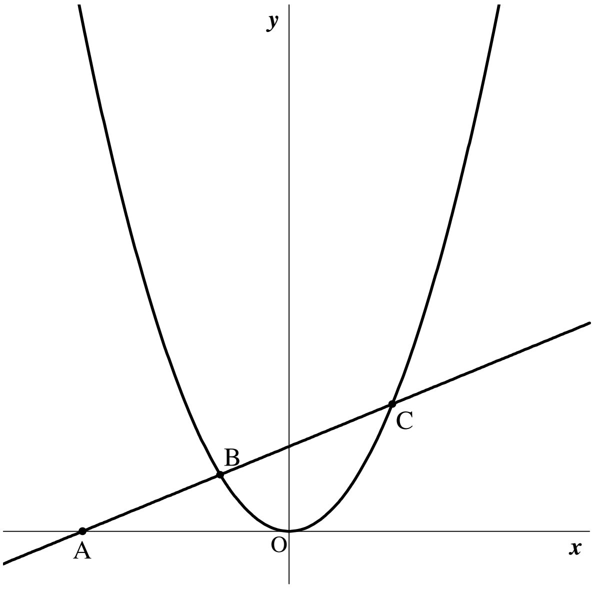
bと cの符号	
範囲：関数・回転体	難易度：★★★★★

得点　　　/14

【出典：2009 年度　ラ・サール高校】

$y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフと点 A（$-3, 0$）を通る直線が，図のように 2 点 B, C で交わっている。このとき，△OAB と△OBC の面積の比は 4 : 5 である。点 B，C の x 座標はそれぞれ b，c として，次の問に答えよ。

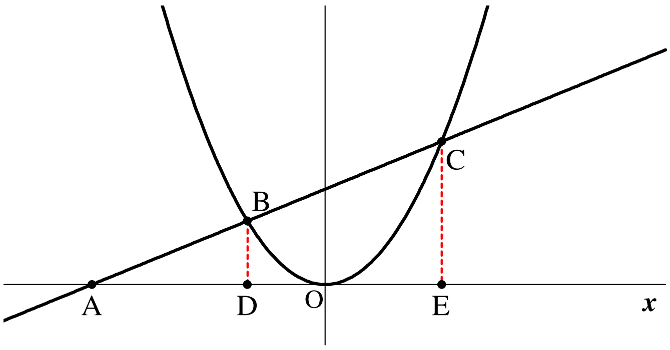


（1）b，c の値をそれぞれ求めよ。

（2）△OBC を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

【解答例】

（1）（5 点×2）



△OAB と△OBC の高さは共通だから，

△OAB : △OBC＝4 : 5 より， AB : BC＝4 : 5 である。

B，C から x 軸に垂線を下ろし，交点をそれぞれ D，E とする。

AD：AE＝BD：CE＝4：9 より，

$(3+b):(3+c)=4:9$ …①

$\frac{1}{3}b^2:\frac{1}{3}c^2=4:9$ すなわち $\frac{b^2}{c^2}=\frac{4}{9}$…②

②において，$b<0$，$c>0$ であるから，

$b=-\frac{2}{3}c$ ①に代入して，$\boldsymbol{c=\frac{3}{2}, b=-1}$

（2）（4 点）

△OBC＝△ACE－△ADB－△ODB－△OEC である。

それぞれ x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，

$\triangle$ ACE の体積 $=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16}\pi\cdot\frac{9}{2}=\frac{27}{32}\pi$

$\triangle$ ADB の体積 $=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\pi\cdot 2=\frac{2}{27}\pi$

$\triangle$ ODB の体積 $=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\pi\cdot 1=\frac{1}{27}\pi$

$\triangle$ OEC の体積 $=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16}\pi\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{32}\pi$

$\triangle$ ACE の体積 $=\left(\frac{27}{32}-\frac{2}{27}-\frac{1}{27}-\frac{9}{32}\right)\pi=\boldsymbol{\frac{65}{144}\pi}$

【コメント】

例の感染症の影響で，一部都道府県では三平方の定理を出題しないそうです。その際に，代わりの問題となってくるのが，式変形がややこしい問題だと思われます。

ラサールの問題なので難しいですが，（1）は，b と c の符号からあり得る値を絞らなくてはなりません。（絞らなくても無理やり解けますが）

（1）は面積比は当たり前に知っていて，そこからどううまく計算するかが問われていますね。

（2）はサービス問題……かと思いきや，結構計算が面倒。三平方なくなったら，こういう計算がひたすら面倒な問題にも注意ですね。