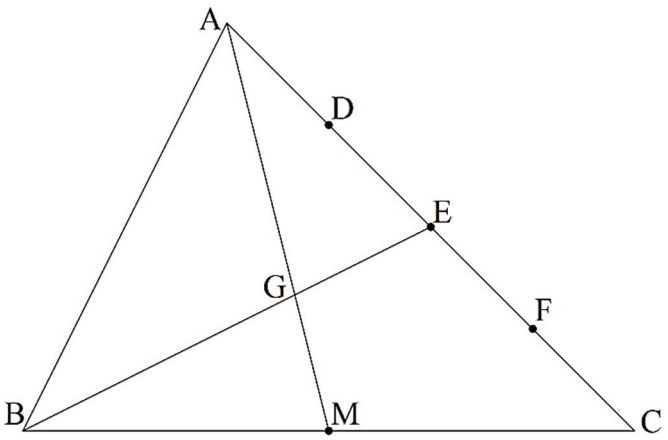
芸術的な高校入試第９回

出典：2011 年度　札幌光星高校	
難易度：★★★★★☆	美しさ：★★★★☆☆
総試験時間：45 分	配点：9 点/60 点

下の図のように，△ABC があります。点 D，E，F は，線分 AC を 4 等分，M は線分 BC を 2 等分しています。線分 AM と線分 BE との交点を G とします。次の問いに答えなさい。ただし，最も簡単な比で答えること。



問 1　AG：GM を求めなさい。

問 2　線分 DM と線分 BE との交点を H，線分 BD と線分 AM との交点を I とします。

（1）BG：GH を求めなさい。

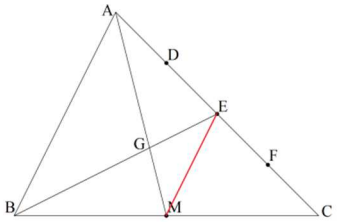
（2）△AID は△GMH の何倍の面積ですか，求めなさい。

【コメント 1】

ベクトル使用禁止です。高校入試なので。久々に解きなおしたら，案外綺麗な解答が出来ました。本番思いつくかは別ですが。

【解答例】

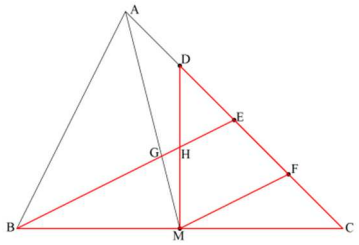
問 1（3 点）



ME を結ぶ。点 M，E は BC，AC の中点だから，中点連結定理より，AB：ME＝**AG：GM＝2：1**

問 2

（1）（3 点）



Point　中点連結定理が適用できる△を見つける！

△CBE で，中点連結定理より，

BE：MF＝2：1＝4：2…①

△DMF で，中点連結定理より，

MF：HE＝2：1…②

①，②より，BE：HE＝4：1＝12：3…③

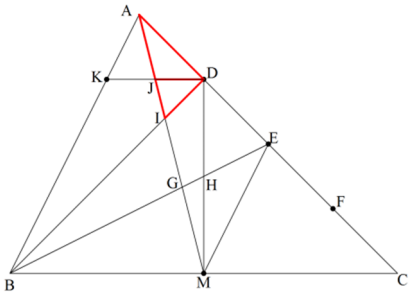
問 1 より，BG：GE＝2：1 だから，

BE：BG：GE＝3：2：1＝12：8：4…④

③，④より，BE：GH＝12：(4－3)＝12：1

したがって，**BG：GH＝8：1**

（2）（3 点）



何とかして，I 近辺の情報を得たいのですが，垂直線を引いたり平行線引いたりしても，無理だって分かります。仕方ないので，I に詳しそうな点 D から，線分 BC に平行な線を引きます。上のように。

Point　△ABC で何とか面積を表す！

（△AID）

BC：KD＝4：1 より，点 M，J はそれぞれ BC，KD の中点だから，BM：DJ＝4：1

△BMI∽△DJI なので，BI：DI＝4：1（※）

したがって，

$$\triangle \mathrm{AID} = \frac{1}{5}\triangle \mathrm{ABD} = \frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{20}\triangle \mathrm{ABC} \ldots ①$$

（△GMH）

BG：GH＝8：1 だから，

$$\triangle \mathrm{GMH} = \frac{1}{8}\triangle \mathrm{GMB}$$

AG：GM＝2：1 だから，

$$\triangle \mathrm{GMH} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{8}\times\triangle \mathrm{ABM} = \frac{1}{24}\triangle \mathrm{ABM}$$

$$= \frac{1}{48}\triangle \mathrm{ABC} \ldots ②$$

①，②より

$$\triangle \mathrm{AID} : \triangle \mathrm{GMH} = \frac{1}{20} : \frac{1}{48} = \frac{1}{5} : \frac{1}{12} = 12:5$$

$$\triangle \mathrm{AID} = \frac{12}{5}\triangle \mathrm{GMH}$$　**$\frac{12}{5}$倍**

（※）＜補助線引けない場合はベクトル＞

$k(0 < k < 1)$とし，$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$= \frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$　と表せるから，BI：ID＝4：1

としても良い。

【コメント 2】

高校入試ですが，ベクトルの素晴らしさが分かる問題ですね。最後の問題解けた受験生いるのでしょうか……。

【作成者】

https://hokkaimath.blog.fc2.com/