

ナンセンスな高校入試第1回

出典：2012年度 埼玉県高校入試 大問3

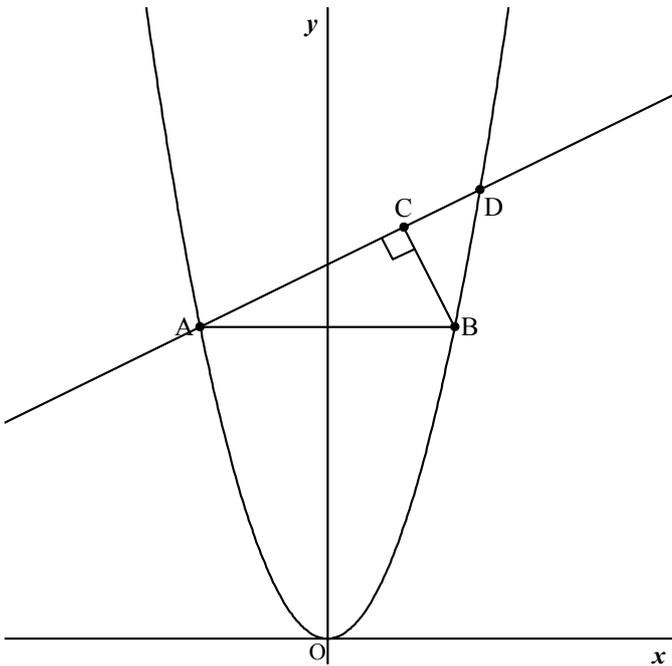
難易度：★★★★★☆☆

美しさ：☆☆☆☆☆☆

総試験時間：50分

配点：11点/100点

下の図で、曲線は関数 $y=ax^2$ (a は正の定数) グラフであり、曲線上に、 x 座標がそれぞれ $-5, 5$ の点 A, B をとります。点 A を通り傾きがこの曲線の式の係数と同じ a である直線と、この曲線との交点を D とします。点 B から直線 AD へ垂線をひいたときの交点を C としたとき、点 C の x 座標は正であり、 $\triangle ABC$ の面積が 20 cm^2 となりました。次の問いに答えなさい。ただし、座標軸の単位の長さを 1 cm とします。

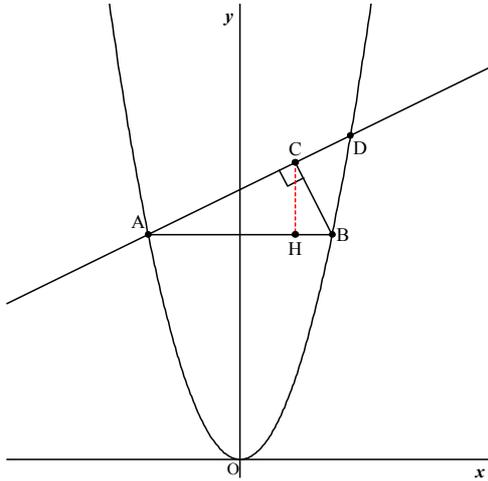


- (1) a の値を求めなさい。(5点)
- (2) 線分 CD の長さを求めなさい。(6点)

【コメント1】

正答率 0.4%，埼玉県議会でも議題となった問題らしいです。「おもしろ問題」としては良いですが、「入試問題」としては最悪です。(1) が解けないと (2) が解けないのに、(1) の方が大分難しい、配点が低いというバランス、「直線の傾きを同じ a とする。」とか言う無理やり感が、あまり美しくありません。

【解答例】



(1) (5 点)

<発想>

三角形の面積は、底辺×高さ÷2 で求められる。△ABC の面積は、AB×高さ÷2 で普通は求めることから、C から垂線 CH を下ろす。すると、CH の長さがすぐ分かり、∠C=90° だから、相似な三角形を利用できる。

AB=10 cm だから、点 C から辺 AB に垂線 CH を下ろすと、CH=4 cm となる。

△AHC ∼ △CHB より、AH : HC = CH : HB

AH=x と置くと、 $x : 4 = 4 : (10-x)$

$$x(10-x) = 16 \quad x^2 - 10x + 16 = 0 \quad (x-8)(x-2) = 0$$

図より、AH > 5 だから、 $x=8$

$$a = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{CH}{AH} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(2) (6 点)

直線 AD は、傾き $\frac{1}{2}$ で、点 A を通るから、

$$AD : y = \frac{1}{2}x + 15 \quad \text{すると、} C\left(3, \frac{33}{2}\right)$$

$y = \frac{1}{2}x + 15$ と、 $y = \frac{1}{2}x^2$ を連立した方程式を解いて、

$x = -5, 6$ D (6, 18) (※)

$$CD = \sqrt{(6-3)^2 + \left(\frac{36}{2} - \frac{33}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ cm}$$

(※)

$y = ax^2$ 上に、B (b, ab^2), C (c, ac^2) を取ります。このとき、直線 BC の傾きは、

$$\frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{ab^2 - ac^2}{b - c} = \frac{a(b+c)(b-c)}{b-c} = a(b+c)$$

であることを利用して、点 D の x 座標を p とし、

$$\frac{1}{2}(-5+p) = \frac{1}{2} \quad p=6 \quad \text{としてもよい。}$$

【コメント2】

(1) の最初の関門は、CH を引けるかにかかっています。まあこの補助線は比較的思いつきやすいでしょう。問題はその後、上手く相似を使えるかです。無理やり a を使って直線の式とか C, D の座標を出そうとすると、泥沼にはまります。

正答率 0.4% らしいですが、入試としては大失敗ですね。 $y=ax^2$ のグラフ問題が解けなくても、高校に受かってしまいます。しかも (1) 解けたら (2) は余裕なので、大いにこの問題だけで差がついてしまいます。どこかのネットで「解けるか解けないか見極めるべき問題。ハイセンス。」とかほざいている奴いましたが、こういう奴が酷い入試問題作るのでしょうね。見極め問題出すなら、もう少し配点は控えめにすべきです。

まあ問題自体は若干面白いですが。(補助線、相似を使う所はね。(2) は全く芸がないけど。)

【作成者】

<https://hokkaimath.blog.fc2.com/>