知っておきたい因数分解と整数問題

出典：2015 年度　旭川医科大学　大問 1　改題

$f(p,q,r)=p^3-q^3-27r^3-9pqr$ について，次の問いに答えよ。

（1） $f(p,q,r)$ を因数分解せよ。

（2）（1）で因数分解された式の因数のうち，最も項数の多いものを$g(p,q,r)$とする。p，q，r が正の整数のとき，$g(p,q,r)>0$を証明せよ。

（3）等式$f(p,q,r)=0$ と，$p^2-10q-30r=11$ との両方を満たす正の整数の組を求めよ。

※（２）は追加問題です。本番は（１）と（３）のみでした。

【解答例】

（1）（20 点）

■公式暗記している場合

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$であるから，

$a=p$，$b=-q$，$c=-3r$ とすると，

$p^3-q^3-27r^3-9pqr$

$=\boldsymbol{(p-q-3r)\left(p^2+q^2+9r^2+pq-3qr+3rp\right)}$となる。

■忘却の彼方の場合

$p-q=a$，$pq=b$と置く。すると，

$p^2+q^2=(p-q)^2+2pq=a^2+2b$

$p^3-q^3=(p-q)\left(p^2+pq+q^2\right)=a\left(a^2+3b\right)$

すると，

$p^3-q^3-27r^3-9pqr$

$=a\left(a^2+3b\right)-27r^3-9rb$

$=a^3+3ab-27r^3-9rb$

$=a^3+3(a-3r)b-27r^3$

$a=3r$ とすると，$a^3+3(a-3r)b-27r^3=0$となるから，因数分解すると，

$(a-3r)\left(a^2+3ra+9r^2+3b\right)$

$=\boldsymbol{(p-q-3r)\left(p^2+q^2+9r^2+pq-3qr+3rp\right)}$

※因数分解で困ったら基本対称式を利用して置き換えすると，都合が良い事が多い。

（2）（20 点）

正の整数 p，q，r について，

$g(p,q,r)=p^2+q^2+9r^2+pq-3qr+3rp$

$=\dfrac{1}{2}\left(2p^2+2q^2+18r^2+2pq-6qr+6rp\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left((p+q)^2+(q-3r)^2+(3r+p)^2\right)>0$

※知らないと出来ないので，暗記しておくとよい。

（3）（20 点）

（1），（2）より，与えられた条件は，

$$\begin{cases} p - q - 3r = 0 \ldots ① \\ p^2 - 10q - 30r = 11 \ldots ② \end{cases}$$

となる。①より，$q+3r=p$…③　③を②に代入し，

$p^2 - 10p - 11 = 0$　$(p-11)(p+1) = 0$ $p > 0$ より，$p = 11$

これを③に代入して，$q + 3r = 11$　このことから，r＝1，2，3　となる。

したがって，求める（p, q, r）の組は，

$\boldsymbol{(p, q, r) = (11, 8, 1)\ (11, 5, 2)\ (11, 2, 3)}$

【コメント】

昔高 2 に教えるときに作成したプリントです。(2）は誘導として追加しておきました。一度解いておくと，結構幸せになれる問題です。

【余談】

私の母校は，週末課題として入試の過去問 4 題を配っていました。やる人：やらない人＝8：2 程度。この問題も高 1 の頃週末課題で出された問題です。私は数学の勉強苦手で（2）を知らなかったので，中々苦労した記憶があります。医学部受験者にとっては常識らしい。