等面四面体と垂心

出典：2015 年度東北大学　文系大問 2　理系大問 5

$t>0$ を実数とする。座標平面において, 3 点 A$(-2, 0)$, B$(2, 0)$, P$(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

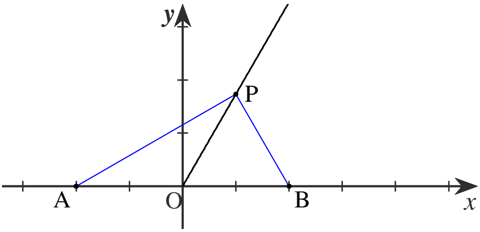
（1） 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

（2） 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

（3） 辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく。t が（1）で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値とそのときの t の値を求めよ。

【解答例】

（1）（15 点）



A（-2, 0），B（2, 0），P（$t, \sqrt{3}t$）なので，

$t>-2$ のとき∠PAB が鋭角となり，

$t<2$ のとき∠PBA が鋭角となる。

…①

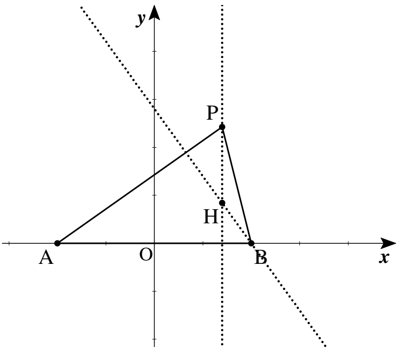
∠APB が直角となるのは,

AP の傾き$=\dfrac{\sqrt{3}t}{t+2}$, BP の傾き$=\dfrac{\sqrt{3}t}{t-2}$ なので，$\dfrac{3t^2}{t^2-4}=-1$　となるとき,

すなわち$t>0$ より$t=1$ のときである。

点 P は直線 $y=\sqrt{3}x$（$x>0$）上を動くので，$t>1$ のとき，∠APB は鋭角となる。…②　①，②より求める範囲は，$\mathbf{1<t<2}$

（2）（10 点）



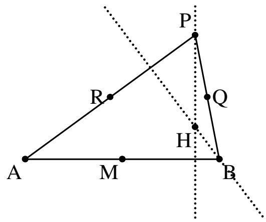
垂心 H の座標は，B から AP に下ろした垂線と, P から AB に下ろした垂線との交点である。

直線 BH の傾きは$\dfrac{-1}{\dfrac{\sqrt{3}t}{t+2}}$,

(2, 0)を通るので，　直線 BH の式は,

$y=-\dfrac{t+2}{\sqrt{3}t}x+\dfrac{2t+4}{\sqrt{3}t}$　ここに$x=t$を代入して，$\mathbf{H}\left(t, \dfrac{-t^2+4}{\sqrt{3}t}\right)$

（3）（35 点）



M（0, 0）となる。

△MQR の面積は，RQ＝2，高さ$\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$ なので，

$\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

M，R，Q は，それぞれ AB，AP，BP の中点なので，中点連結定理より，AB//RQ，AP//MQ，BP//MR となる。

したがって，四面体を組み立てたとき，A，P，B が重なる点を C とすると，H は垂心なので，PH⊥△MQR となるから，高さは CH となる。

$$CH=\sqrt{CM^2-MH^2}=\sqrt{4-\left(t^2-\dfrac{(-t^2+4)^2}{3t^2}\right)}$$

$$=\dfrac{2}{t}\sqrt{\dfrac{-(t^4-5t^2+4)}{3}}$$

したがって，正四面体の体積は，

$$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\times\left(\dfrac{2}{t}\sqrt{\dfrac{-(t^4-5t^2+4)}{3}}\right)=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{-(t^4-5t^2+4)}$$

と表せる。

$t^4-5t^2+4=\left(t^2-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$ であるから，

正四面体の最大値は，$t^2=\dfrac{5}{2}$　すなわち，$t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のとき，

$\dfrac{1}{3}\times\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ となる。

【コメント】

　垂心が何なのか分かっていれば楽勝です。色々な解法があって楽しい問題ですね。

作成：高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/