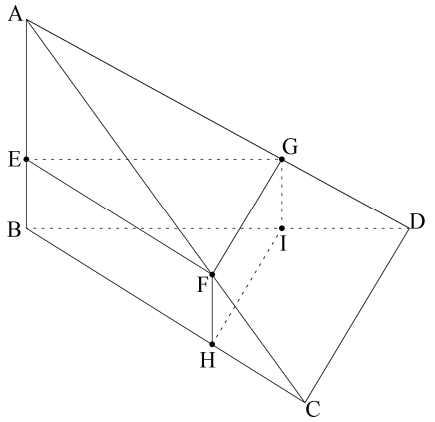
芸術的な高校入試第６回

出典：2016 年度　都立日比谷高校	
難易度：★★★★★☆	美しさ：★★★★★☆
総試験時間：50 分	配点：25 点/100 点

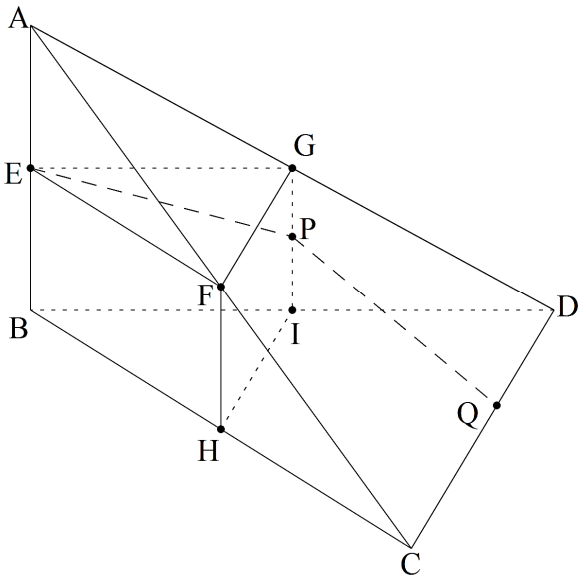
下の図 1 に示した立体 A-BCD は，AB＝6 cm，BC＝8 cm，CD＝6 cm，BD=10 cm，∠ABC＝∠ABD＝90°の三角錐である。立体 EFG-BHI は，点 E，点 F，点 G，点 H，点 I が，それぞれ辺 AB，AC，AD，BC，BD 上にある三角柱である。AE＝x cm とする。次の問いに答えなさい。



問 1　立体 A-BCD の表面積を求めなさい。

問 2　立体 A-EFG の体積を Vcm^3，立体 FG-HCDI の体積を W cm^3 とする。V：W＝1：2 のとき，x の値を求めなさい。

問 3　以下の図は，x=3 のとき，線分 GI 上にある点を P，辺 CD 上にある点を Q としたものである。EP+PQ が最も短くなるとき，EP+PQ の長さを求めなさい。



【コメント 1】

この問題もシンプルな図ながら長い計算を要求されますが，条件の与え方が丁度良く，気持ちよく計算できます。ただ高校受験の中学生に解かせる問題か？とは思いますが（問 2)。

【解答例】

問 1（7 点）

$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} * 8 * 6 = 24$　$\triangle \mathrm{ABD} = \frac{1}{2} * 10 * 6 = 30$

$\triangle$ BCD で，$\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{BD}^2$だから，

$\triangle \mathrm{BCD} = \frac{1}{2} * 6 * 8 = 24$

$\mathrm{AC} = \sqrt{36+64} = 10$　$\mathrm{AD} = \sqrt{36+100} = 2\sqrt{34}$

$\mathrm{AC}^2 + \mathrm{CD}^2 = 136 = \mathrm{AD}^2$より $\triangle \mathrm{ACD} = \frac{1}{2} * 6 * 10 = 30$

表面積は，$24 + 30 + 24 + 30 =$ **108 cm²**

問 2（10 点）

$\mathrm{AE} = x$のとき，$\mathrm{AB}:\mathrm{AE} = 6:x$，$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{AEF}$ だか

ら，$\mathrm{BC}:\mathrm{EF} = 8:\mathrm{EF} = 6:x$より，$\mathrm{EF} = \frac{4}{3}x$

$\mathrm{FG} = \frac{6}{8}\mathrm{EF} = x$

$\mathrm{V} = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} * \frac{4}{3}x * x * x = \frac{2}{9}x^3$

立体 EFG-BHI の体積は，

$\frac{1}{2} * \frac{4}{3}x * x * (6-x) = \frac{2}{3}x^2(6-x)$

立体 A-BCD の体積は，

$\frac{1}{3} * 24 * 6 = 48$　よって，

$\mathrm{W} = 48 - \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2(6-x) = \frac{4}{9}x^3 - 4x^2 + 48$

$\mathrm{V}:\mathrm{W} = 1:2$ だから，$\frac{4}{9}x^3 = \frac{4}{9}x^3 - 4x^2 + 48$

$4x^2 = 48$　$x^2 = 12$　$x > 0$ より，$\boldsymbol{x = 2\sqrt{3}}$

問 3（8 点）

最も短くなるのは, E, P, Q が一直線上に来たとき……ではなく，PQ が最も短くなるのは，IQ⊥CD となるときである。よって，まず E，P，Q を一直線に並べ，その後に，Q を IQ⊥CD となる位置に，△PEG∽△PQI を維持しながら，動かせば，最短距離となる。

$x = 3$ だから，F，G，H，I は中点となっているので

$\mathrm{IQ} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} = 4$　　$\mathrm{EG} = \frac{1}{2}\mathrm{BD} = 5$

$\mathrm{GP} = y$とすると，$\mathrm{PI} = 3 - y$

△PEG∽△PQI だから，

$5:4 = y:(3-y)$　$4y = 15 - 5y$　$9y = 15$　$y = \frac{5}{3}$

$\mathrm{EP} = \sqrt{25 + y^2} = \sqrt{\frac{225}{9} + \frac{25}{9}} = \frac{5\sqrt{10}}{3}$

$3 - y = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$　なので，

$\mathrm{PQ} = \sqrt{16 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{144}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$

最小値 $= \frac{9\sqrt{10}}{3} = \boldsymbol{3\sqrt{10}}$ **cm**

【コメント 2】

いくら日比谷高校だからと言って，問 3 解けた人いるんでしょうか。最短距離は直線！だけではないことを教えてくれる問題です

日比谷って，図形的知識より計算頑張る人が欲しいのね。見てよく分かります。高校なったらこういう問題ばっかりです。

【作成者】

https://hokkaimath.blog.fc2.com/