極値と変曲点の幾何学
出典：2016 年度　北海道大学　文系

a, b, c を実数とし，$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$とおく。曲線 $C: y = f(x)$上に異なる 2 点$\mathrm{P}\big(s, f(s)\big)$, $\mathrm{Q}\big(t, f(t)\big)$がある。

(1) P における C の接線の方程式を求めよ。

(2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を s，t，a の関係式として求めよ。

(3) (2) の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。

【解答例】

（1）

$f'(x)=3x^2+2ax+b$より，$f'(s)=3s^2+2as+b$

したがって，接線の方程式は，$y=f'(s)(x-s)+f(s)$

だから，$y=\left(3s^2+2as+b\right)(x-s)+s^3+as^2+bs+c$

整理して，$\boldsymbol{y=\left(3s^2+2as+b\right)x-2s^3-as^2+c}$

（2）

$f'(t)=3t^2+2at+b$　接線が平行になるとき，傾きが同じになるから，$f'(s)=f'(t)$

$3s^2+2as+b=3t^2+2at+b$　整理して，

$3\left(s^2-t^2\right)+2a(s-t)=0$

$(s-t)(3s+3t+2a)=0$

$s\neq t$ だから，$\boldsymbol{3s+3t+2a=0}$

（3）

(2)において，　$s+t=-\dfrac{2}{3}a$　$\left(a=-\dfrac{3}{2}(s+t)\right)$

$f\left(\dfrac{s+t}{2}\right)=\dfrac{f(s)+f(t)}{2}$を示す。

$$f\left(\frac{s+t}{2}\right)=\left(\frac{s+t}{2}\right)^3+a\left(\frac{s+t}{2}\right)^2+b\left(\frac{s+t}{2}\right)+c$$

$$=\left(-\frac{1}{3}a\right)^3+\left(-\frac{1}{3}a\right)^2+b\left(-\frac{1}{3}a\right)+c$$

$$=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c\cdots①$$

$$\frac{f(s)+f(t)}{2}=\frac{1}{2}\left(s^3+as^2+bs+c+t^3+at^2+bt+c\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(s^3+t^3+a\left(s^2+t^2\right)+b(s+t)+2c\right)$$

ここで，

$$s^3+t^3+a\left(s^2+t^2\right)=s^3+t^3-\frac{3}{2}(s+t)\left(s^2+t^2\right)$$

$$=(s+t)^3-3st(s+t)-\frac{3}{2}(s+t)\left(s^2+t^2\right)$$

$$=(s+t)\left((s+t)^2-3st-\frac{3}{2}\left(s^2+t^2\right)\right)$$

$$=(s+t)\left(-\frac{1}{2}s^2-st-\frac{1}{2}t^2\right)=-\frac{1}{2}(s+t)^3=\frac{4}{27}a^3$$

$b(s+t)+2c=-\dfrac{2}{3}ab+2c$なので，

$$\frac{f(s)+f(t)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}ab+2c\right)=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c\cdots②$$

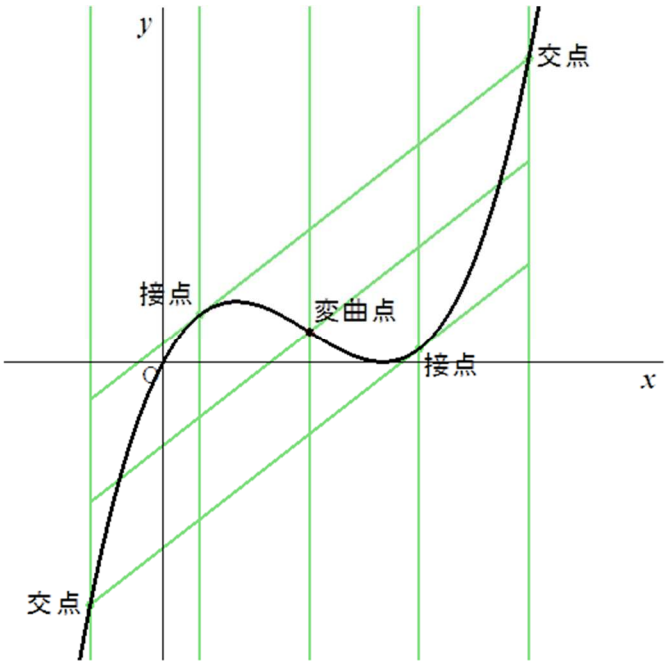
①，②より $f\left(\dfrac{s+t}{2}\right)=\dfrac{f(s)+f(t)}{2}$ だから，

（2）の条件のもとで，線分 PQ の中点は C 上にある。

【コメント】

（1），（2）は基本，（3）は私やたら長く書いてしまったかも。

これの確認となります。



変曲点，接点，交点は，合同な平行四辺形で埋め込まれます。今回は，接点の中点が変曲点になることを証明しています。

【プリント製作】芸術的な難問・良問数学

https://hokkaimath.blog.fc2.com/