図形的性質で露骨に楽になる問題

出典：2018 年度　小樽商科大学　大問 3

次の$\boxed{}$の中を適当に補って，それを解答用紙に書け。証明や説明を省かないこと。

(1)　三角形 ABC において，$C = 45°$かつ

$\cos A \cos B = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$が成り立つとき，

$\cos(A - B) =$$\boxed{（\quad ア\quad ）}$である。

(2)　1，2，3，4，5 を 1 回ずつ使って作られる 5 桁の数のうち，一の位が 1 でなく，かつ十の位が 2 でないような数は全部で$\boxed{（\quad イ\quad ）}$個ある。

(3)　座標平面に点 A$(1, 0)$および点 B$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$および点 P$(x, y)$をとる。

$x>0$ であり，直線 AP と直線 BP が垂直に交わり，線分 AP の長さと線分 BP の長さが等しいとき，(x, y) ＝$\boxed{（\quad ウ\quad ）}$である。

【解答例】

（1）（20 点）

$A+B=135^\circ$ なので，

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}-\sin A\sin B=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \sin A\sin B=\frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{4\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

（2）（20 点）

5 桁の数は，5!＝120 通り

①，一の位が 1 の数は，4!＝24 通り

②，十の位が 2 の数は，4!＝24 通り

①，②を両方満たすものは，3!＝6 通り

よって，求める個数は，120－48＋6＝**78 個**

（3）（20 点）

点 O を原点とする。A，B は中心を O とする半径 1 の円周上にある。

△OAB と△PAB は二等辺三角形，OP⊥AB，∠AOB＝120° だから，

（二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分することにより）

点 P は∠POA＝∠POB＝60° となる位置，

すなわち$y=\sqrt{3}x$上にある。$\mathrm{P}\left(t\,,\sqrt{3}t\right)$と置く（$t>0$）。

AB と PO の交点を H とする。∠AHO＝90° だから，

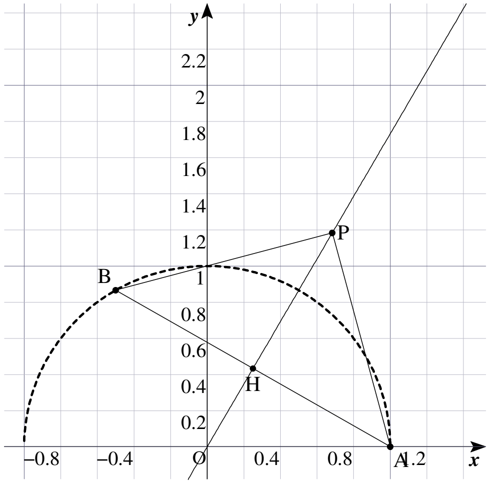
$$\mathrm{AH}=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \mathrm{OH}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

APとBPが垂直に交わるとき，△PBAは，

∠PBA＝∠PAB＝45°の二等辺三角形となるから，AH＝PH

$$\mathrm{OP} = \sqrt{t^2 + 3t^2} = 2t = \mathrm{OH} + \mathrm{AH} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$t = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$，P$\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}}\right)$



【コメント】

（1）（2）は余裕。（3）は，数値から「あ！」と思わなくてはなりません。図形的性質を使うと，計算が大分楽になる良い例です。○○の解答例はがむしゃらでしたが。実はどの大学でも，中学生で習うようなことを思い出すと，楽に解ける問題が出題されたりします。ただし普通の高校生は忘れているので，力技で解いちゃうこともあります。小学校や中学校の算数，数学の勉強って意外な所で効いてくるのです。