

中学生でも解ける？入試問題 1

出典：2018 年度センター試験 IA 第 4 問 整数

(1) 144 を素因数分解すると、

$$144 = 2^{\boxed{\text{ア}}} \times \boxed{\text{イ}}^{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり、144 の正の約数の個数は $\boxed{\text{エオ}}$ 個である。

(2) 不定方程式は

$$144x - 7y = 1$$

の整数解 x, y の中で、 x の絶対値が最小になるのは

$$x = \boxed{\text{カ}}, y = \boxed{\text{キク}}$$

であり、すべての整数解は、 k を整数として

$$x = \boxed{\text{ケ}}k + \boxed{\text{カ}}, y = \boxed{\text{コサシ}}k + \boxed{\text{キク}}$$

と表される。

(3) 144 の倍数で、7 で割ったら余りが 1 となる自然数のうち、正の約数の個数が 18 個である最小のものは $144 \times \boxed{\text{ス}}$ であり、正の約数の個数が 30 個である最小のものは $144 \times \boxed{\text{セソ}}$ である。

【解答】

ア, イ, ウ	4, 3, 2	3
エオ	15	3
カ	2	2
キク	41	2
ケ	7	2
コサシ	144	2
ス	2	3
セソ	23	3

【解説】

(1)

$$144 = 12^2 = (2^2 \times 3)^2 = 2^4 \times 3^2$$

144 の正の約数は、 $2^m \times 3^n$ の (m, n) を変えることによって得られる。 $(m=0, 1, 2, 3, 4 \quad n=0, 1, 2)$
 (m, n) の選び方は、 $5 \times 3 = 15$ 通り。

(2)

【Point】

不定方程式の係数が大きかったら、係数を小さくして考える！

$144x - 7y = 1$ は、 $7(20x - y) + 4x = 1$ と変形できる。これを満たす (x, y) のうち、 x の絶対値が最小になるものは、

$$\begin{cases} 7(20x - y) = -7 \\ 4x = 8 \end{cases} \quad x = 2, \quad y = 41$$

$$144x - 7y = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$144 \cdot 2 - 7 \cdot 41 = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 144(x - 2) - 7(y - 41) = 0$$

$$144(x - 2) = 7(y - 41)$$

$x - 2$ と、 $y - 41$ は互いに素だから、

$x - 2$ は 7 の倍数、 $y - 41$ は 144 の倍数なので、 k を整数とし、 $x - 2 = 7k \quad y - 41 = 144k$

$$x = 7k + 2 \quad y = 144k + 41$$

(3)

<解法 1>～誘導にしっかり乗る～

$144x$ は 7 で割ったら 1 余るので、 $144x = 7y + 1$ と表せる。よって、(2) より、 $x = 7k + 2$

正の約数を 18 個にするためには、 $144 = 2^4 \times 3^2$ に、2 か 3 いずれか 1 つをかければ良い。

$k = 0$ のとき、 $x = 2$ 最小の整数は 2。

$144x$ の正の約数を 30 個にするには、

「2 か 3 以外の素数をかける。」または

「2 と 3 の指数 (m, n) を $(5, 4)$ か $(4, 5)$ か $(9, 2)$ にする。(つまり、18 か、27 か、32 をかける。)」である。

18, 27, 32 はいずれも $7k + 2$ を満たさない。よって、2 か 3 以外の素数をかければ良い。最小の素数は、 $k = 3$ のとき、 $7 \times 3 + 2 = 23$ となる。

<解法 2>～誘導に乗れなかった場合～

$$144 \equiv 4 \pmod{7} \text{ より,}$$

$288 \equiv 8 \equiv 1 \pmod{7}$ 2 をかければ、正の約数の個数が 18 個である最小のものとなる。

正の約数を 30 個とするためには、 $2^4 \times 3^2$ に、

「2 か 3 以外の素数をかける。」または

「2 と 3 の指数 (m, n) を $(5, 4)$ か $(4, 5)$ か $(9, 2)$ にする。(つまり、18 か、27 か、32 をかける。)」である。

$$144 \times 2 \equiv 4 \times 2 \equiv 1 \pmod{7} \text{ より,}$$

$\text{mod } 7$ で 2 と合同な整数のうち、条件を満たす最小の数は、23。

【コメント】

中学生でも参考になるのは (1) (2) ですね。特に、不定方程式において、係数を小さくする方法は、全人類覚えておくべきです。何よりも理解しやすいですからね。

(3) は誘導に上手く乗れば余裕です。ただ気づけるかどうかですね。割と露骨ですが、気づかない場合は mod で無理やりやりましょう。こういうときに mod は大変役に立ちます。