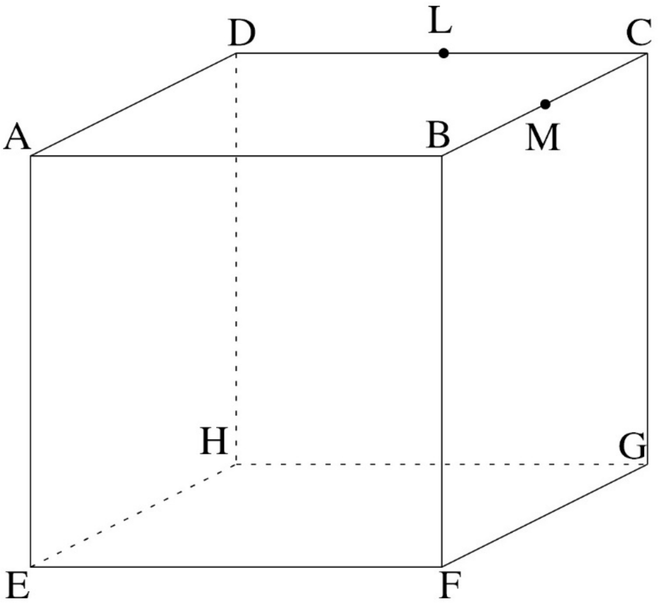
立方体切断で五角形	
範囲：空間図形・三平方	難易度：★★★★★

得点　　　/7

出典：2019 年度　函館有斗高校

下の図のように，一辺の長さが 4 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。辺 BC，CD の中点をそれぞれ M，L とします。次の問いに答えなさい。

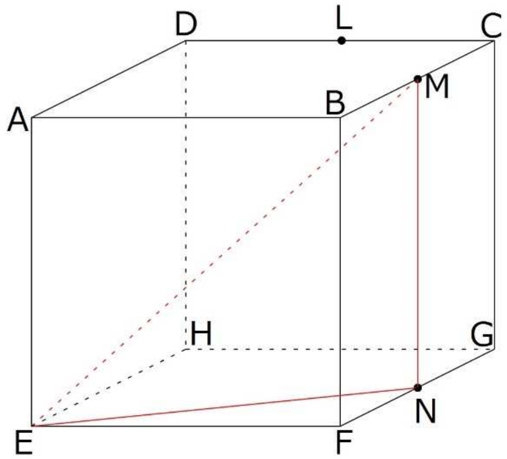


(1) 線分 EM の長さを求めなさい。

(2) 3 点 E, M, L を通る平面で立方体を切断すると，切り口は五角形となります。この五角形の面積を求めなさい。

立方体切断で五角形　解答例	
範囲：空間図形・三平方	難易度：★★★★★

問 1（3 点）



M から FG に垂線を下ろし，交点を N とする。

△EFN で，EF＝4 cm，FN＝2 cm だから，

$EN = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm

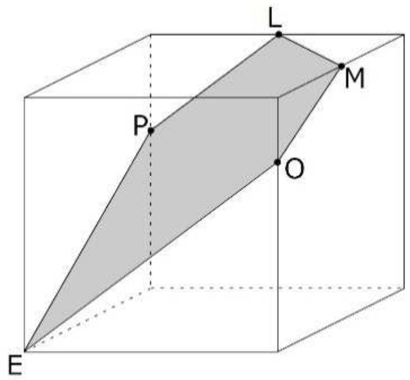
$MN = BF = 4$ cm（長方形ができるから）

△EMN で，

$EM^2 = 20+16 = 36$　$EM =$ **6 cm**

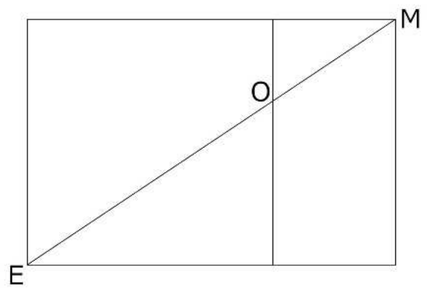
問 2（4 点）

次のように切断面ができる。



M―O―P の線は，最短距離となるように引かれる。

したがって，図に書くと，次のようになる。



$EM = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$ より，$OM = \dfrac{\sqrt{52}}{3}$

同様に，$PL = \dfrac{\sqrt{52}}{3}$

$LM = 2\sqrt{2}$　$OE = PE = \dfrac{2\sqrt{52}}{3}$

四角形 OPLM と△EOP に分けて考える。

$OP = 4\sqrt{2}$

・四角形 OPLM

OP//LM より，四角形 OPLM は台形。

M から OP に垂線を下すと，垂線は，

$$\sqrt{\frac{52}{9}-2} = \frac{\sqrt{34}}{3}$$

$$\text{四角形 OPLM} = \frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{34}}{3} = 2\sqrt{17}\ \text{cm}^2$$

・△EOP

E から OP に垂線を下すと，垂線は，

$$\sqrt{\frac{208}{9}-8} = \frac{2\sqrt{34}}{3}$$

$$\triangle EOP = \frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{34}}{3} = \frac{8\sqrt{17}}{3}\ \text{cm}^2$$

したがって。五角形の面積は，

$$2\sqrt{17}+\frac{8\sqrt{17}}{3} = \boldsymbol{\frac{14\sqrt{17}}{3}\ \text{cm}^2}$$

【コメント】

函館の私立高校の過去問を見る機会があったので，作成してみました。(1) は易しいですが，(2) はとても難しい。たぶん目的は「難しい問題と気づいて次の問題に行けるか」です。この次の問題は関数なのですが，とても簡単です。

立方体切断，忘れたころにどの高校入試でも出題されます。北海道の公立高校入試では，2016 年度。

https://hokkaimath.blog.fc2.com/blog-entry-88.html

上記で「立方体切断の方法」について詳しく解説しておりますので，この解説だけで物足りなかったらどうぞご覧ください。