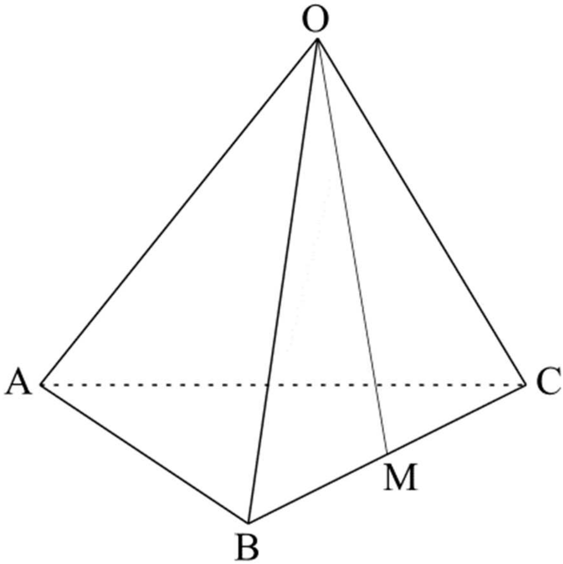
メネラウス，正四面体，高校知識前提！？		
範囲：中 3 空間図形	難易度：★★★★★++	得点　　　　　　/8

出典：2019 年度　福島県

下の図のような，1 辺 12 cm の正四面体 OABC がある。辺 BC の中点を M とする。このとき，次の（1），（2）の問いに答えなさい。



（1）線分 OM の長さを求めなさい。

（2）辺 OC の中点を D とし，辺 OB 上に線分 AE と線分 ED の長さの和が最も小さくなるように点 E をとる。また，線分 AM 上に AP：PM＝4：5 となる点 P をとり，3 点 A，D，E を通る平面と線分 OP との交点を Q とする。

① 線分 OM と線分 DE との交点を R とするとき，線分 OR と線分 RM の長さの比を求めなさい。

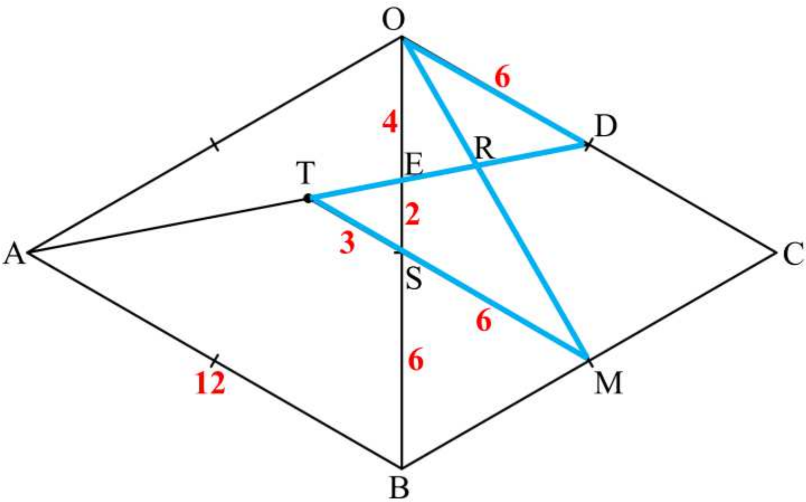
② 三角錐 QPBC の体積を求めなさい。

（**1**）（**2** 点）（正答率 **69.2**%）

OM = $\mathbf{6\sqrt{3}\ cm}$

（**2**）①（**3** 点）（正答率 **8.2**%）

正四面体の展開図の，下の図の部分のみ考える。



AE＋ED が最短距離ということは，上図で，3 点 A，E，D が一直線上に並ぶ。点 M から OC に平行な直線を引き，OB との交点を S，DA との交点を T とする。

・点 S は，ひし形の対角線の交点なので，BS＝6 cm

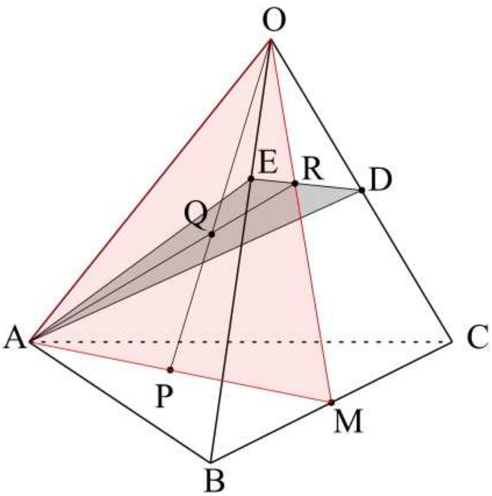
・△EAB∽△EDO，相似比 2：1 だから，EB＝8 cm，ES＝2 cm

・△ETS∽△EDO，相似比 1：2 だから，TS＝3 cm

・△RTM∽△RDO，相似比 3：2 なので，RM：RO＝3：2

すなわち，**OR：RM＝2：3**

（2）②（3 点）（正答率 0.0%）

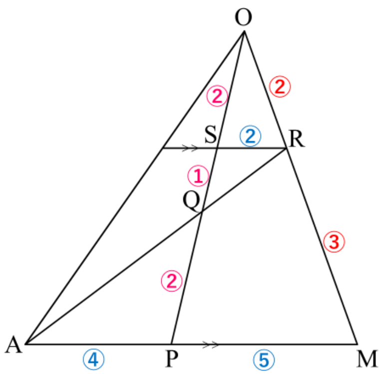


5 点 O，A，P，M，R，Q は同一平面上にあるので，△OAM で考える。

（点 Q は直線 OP 上にあるので，平面 OAM 上にある）。

まず，四面体 Q-PBC の，△PBC を底面としたときの高さを知りたいので，PQ：PO を調べる。

①，PQ：PO



点 R から AM に平行な直線を引き，OP との交点を S とする。

△OSR∽△OPM より，SR：PM＝2：5

また OS：OP＝2：5 より OS：SP＝2：3

△SRQ∽△PAQ より，SQ：PQ＝1：2

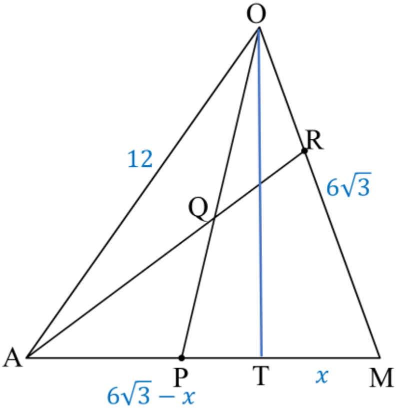
よって，PQ：PO＝2：5 となる。

※補助線系の他の問題　2011 札幌光星

https://hokkaimath.jp/blog-entry-42.html

②，四面体の高さ

PQ：PO＝2：5 なので，四面体 QPBC の高さは，正四面体 OABC の高さの $\frac{2}{5}$倍である。点 O から AM に垂線を下ろし交点を T とする。$\mathrm{TM}=x$とし



$$\mathrm{OT}^2=108-x^2=144-\left(6\sqrt{3}-x^2\right)$$

$$72=12\sqrt{3}x \qquad x=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

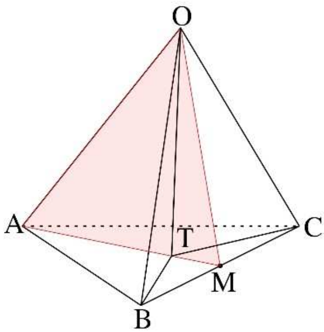
よって，$\mathrm{OT}=\sqrt{108-12}=4\sqrt{6}$

正四面体 OABC において，△ABC を底面としたとき，高さは$4\sqrt{6}$ cm となる。

四面体 QPBC の高さは，

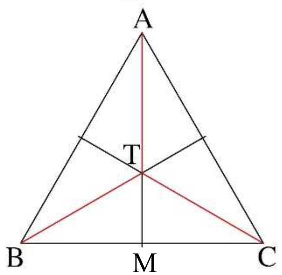
$$4\sqrt{6}\times\frac{2}{5}=\frac{8\sqrt{6}}{5}\ \mathrm{cm}$$

※なぜ OT が高さとなるのかの説明



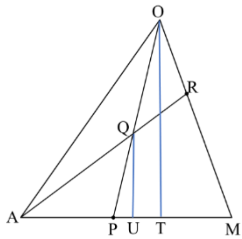
OT⊥平面 ABC なので，OT⊥TA，OT⊥TB，OT⊥TC である。よって，△OAT，△OBT，△OCT は全て合同となり，AT＝BT＝CT

すると，3 組の辺がそれぞれ等しいから，△ABT≡△BCT≡△CAT なので, AM は点 T を通ることが分かる。たぶん福島のこの問題は，この知識を覚えている前提だと思われる。



（また，AT：TM＝2：1，点 T は正三角錐 ABC の重心，外心……など色々と分かるが，それは高校範囲）

※何故高さが 2/5 倍になるのかの説明



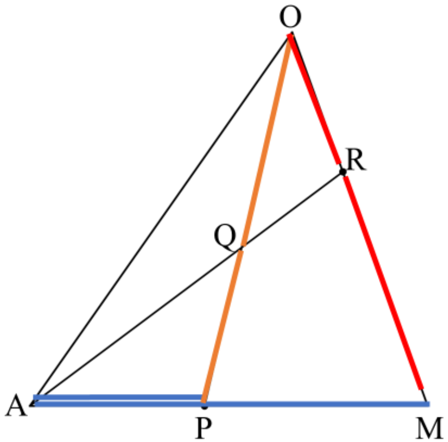
点 Q から AM に垂線を下ろし交点を U とすると，

△QPU∽△OPT だから，QU：OT＝2：5

△PBC は，△ABC に比べて高さが$\frac{5}{9}$ 倍されているので，$\triangle \mathrm{PBC} = \frac{5}{9} \triangle \mathrm{ABC} = \frac{5}{9} \times 36\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

求める体積は，$\frac{1}{3} \times 20\sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{6}}{5} = \frac{1}{3} \times 4 \times 8 \times 3\sqrt{2} = \mathbf{32\sqrt{2}\ cm^3}$

①’，PQ：PO の別の求め方（高校範囲）その 1



メネラウスの定理

$$\frac{MA}{AP} \times \frac{PQ}{QO} \times \frac{OR}{RM} = 1$$

$$\frac{9}{4} \times \frac{PQ}{QO} \times \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{PQ}{QO} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$PQ：QO = 2:3$

こんだけ時間に余裕のない入試だと，これを使わざるをえない（証明は検索か自分で頑張る）。

①”，PQ：PO の別の求め方（高校範囲）その 2（おまけ）

$$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AR}=k\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AM}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AO}\right)=k\left(\frac{2}{5}\bullet\frac{9}{4}\overrightarrow{AP}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AO}\right)=\frac{9}{10}k\overrightarrow{AP}+\frac{3}{5}k\overrightarrow{AO}$$

と表されるから，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QO}=\frac{3}{5}:\frac{9}{10}=6:9=2:3$　となる。

これは中学生には無理なので，高 2 まで待とう。

【コメント】

（2）①でさえすでに難しいのに，（2）②は時間が足りません。最後の問題だからとはいえ，正答率 0.0%，受験として意味なし……。

まず，正四面体の高さの出し方を知っておく必要があります。あんまり中学生で流行りませんね。一応，中学範囲内で解けるようにはなりますが，う～ん，重心とか覚える高校生が解くような問題ではないか？

次に，高さの出し方を知っていたら，それを PQ：PO を利用して 2/5 倍するのですが，PQ : PO の出し方，もうこれはメネラウス使った方が良い。一応中学生でも解ける方法が①ですが，最後の問題，時間ないのに出来るのか？と言う話です。福島，宮城など，何かここらへんの地域は，メネラウス，チェバの定理，中線定理……など，高校範囲で露骨に楽になる問題が目立つ気がします。嫌ですね。

私立なら良いけど，公立で出していいか疑問。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/