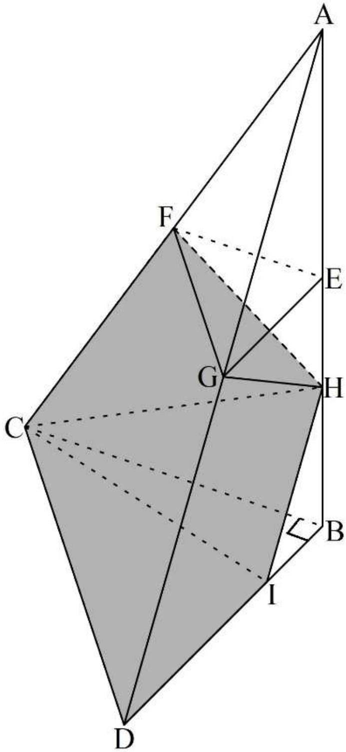
相似と面積比・体積比　練習問題		
範囲：空間図形	難易度：★★★★☆	得点　　　　　/10

出典：2021 年度　大阪府 C

図 II において，　立体 A－BCD は三角すいであり，　直線 AB は平面 BCD と垂直である。△BCD は∠DBC＝90°の直角三角形であり，BC＝8 cm，BD＝6 cm である。E，F，G は，それぞれ辺 AB，AC，AD の中点である。E と F，E と G，F と G とをそれぞれ結ぶ。H は，線分 EB 上にあって E，B と異なる点である。H と C，H と F，H と G とをそれぞれ結ぶ。I は，H を通り辺 AD に平行な直線と辺 BD との交点である。I と C とを結ぶ。次の問いに答えなさい。



（1）△AFE の面積を S cm^2 とするとき，四角形 GDBE の面積を S を用いて表しなさい。

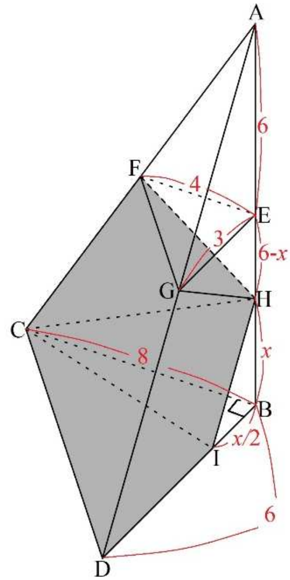
（2）AB＝12 cm であり，立体 A－BCD から立体 AHFG と立体 HBCI を取り除いてできる立体の体積が 70 cm^3 であるときの，線分 HB の長さを求めなさい。

【解答例】

（1）（4 点）

△AEF∽△ABC で相似比が 1：2 だから，面積比は 1：4，よって，△ABC＝4S となる。△ABC と△ABD は高さ AB が共通なので，面積比は BC : BD＝4 : 3 となる。よって，△ABD＝3S となり，△AEG : △ABD＝1 : 4 であることから，△ABD：四角形 GDBE＝4：3，

四角形 GDBE $= 3S \times \frac{3}{4} =$ **$\frac{9}{4}S$ cm²**



（2）（6 点）

三角錐 A－BCD $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times 12 = 96$ cm³

三角錐 A-EFG∽三角錐 A-BCD で，相似比 1：2 より，体積比は 1：8

よって，立体 EFG－BCD の体積は，

$96 \times \frac{7}{8} = 84$ cm³

立体 EHFG と立体 HBCI の体積の合計が 84－70＝14 cm³ となればよい。

HB＝x cm とすると，EH＝(6－x) cm

△HBI∽△ABD，AB：BD＝HB：BI＝2：1 だから，BI＝$\frac{x}{2}$ cm

立体 EHFG $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (6 - x) \times 3 \times 4 = 12 - 2x$

立体 HBCI $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{x}{2} \times x \times 8 = \frac{2}{3}x^2$

$12 - 2x + \frac{2}{3}x^2 = 14$　整理して，$x^2 - 3x - 3 = 0$　$0 < x < 6$ より，

$x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$　**HB $= \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ cm**

【コメント】

某感染症の影響なのか，例年に比べて全体的に落ち着いた問題となっております。

（1）は，相似の面積比，底辺の面積比など，面積比率の練習問題にぴったりです。見かけ上難しそうですが，それなりのレベルの中学生なら，誰でも解ける。定期テストの最後らへんの問題にぴったり！？

（2）も，解答は長くなりますが，基本事項の組み合わせです。気力があれば解ける。正直上位層は，時間があれば余裕で満点取れると思われますが，（2）は焦るとおしまいです。この問題解けなかったときの悔しさは凄そう（後，答えが若干汚いので不安になる）。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/