

平行な面と体積

範囲：中3 空間図形

難易度：★★★★★+

得点

/17

出典：2021年度 山梨県

図1のような底面の円の半径が6 cm、母線の長さが8 cmの円錐がある。このとき、次の1、2に答えなさい。

1 この円錐の高さを求めなさい。

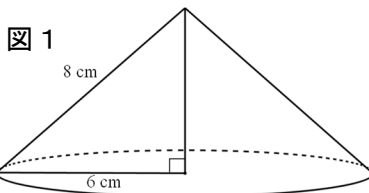


図2

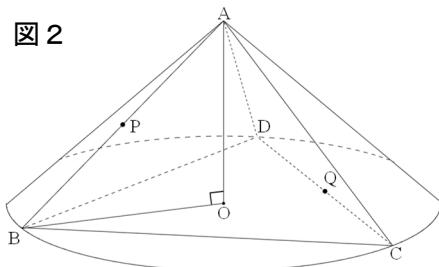
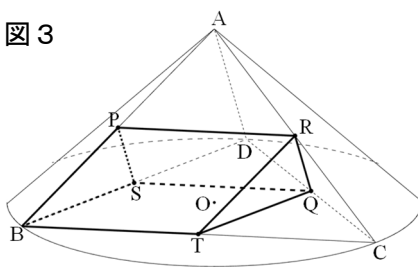


図3



2 図2のように、図1の円錐の頂点をA、底面の円の中心をOとする。

また、底面の円周上に3点B、C、Dを等間隔にとり、4点A、B、C、Dを頂点とする三角錐ABCDを考える。さらに、辺AB、CDの中点をそれぞれP、Qとする。このとき、次の(1)～(4)に答えなさい。

(1) 次のア～オから、辺ACとねじれの位置にある辺や線分をすべて選び、その記号を書きなさい。

ア、辺AB イ、辺BC ウ、辺BD エ、線分AO オ、線分OB

(2) 三角錐ABCDの体積を求めなさい。

(3) 線分PQの長さを求めなさい。

(4) 図3のように、辺AC、BD、BCの中点をそれぞれR、S、Tとすると、6点P、B、S、R、T、Qを頂点とする立体の体積を求めなさい。

【解答例】

1 (4点) (正答率 80%)

$\sqrt{64 - 36} = 2\sqrt{7} \text{ cm}$ ※三平方の定理で有名な6, 8→10としないように注意

2 (1) (3点) (正答率 79%)

ウ オ

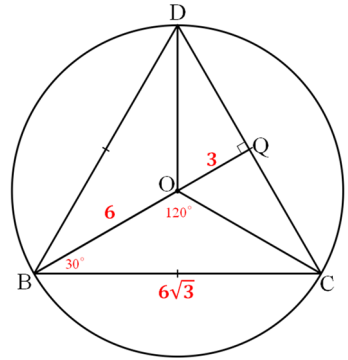
2 (2) (3点) (正答率 7%)

3点 B, C, D を等間隔にとっていることから, $\angle BOC = \angle COD = \angle DOB = 120^\circ$ である。
 $\triangle BDC$ は正三角形となる。

$\triangle BDC$ は, 1辺 $6\sqrt{3} \text{ cm}$ なので,

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 9 = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

求める体積は, $\frac{1}{3} \times 27\sqrt{3} \times 2\sqrt{7} = 18\sqrt{21} \text{ cm}^3$



2 (3) (3点) (正答率 3%)

直線 BO 上に点 Q はあるので, 点 A, P, B, O, Q は同一平面上にある。

【解答例 1】

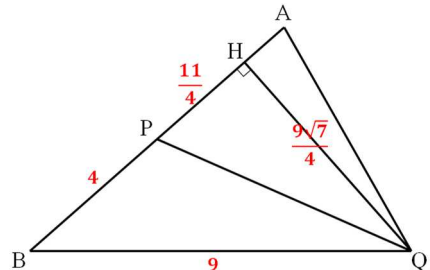
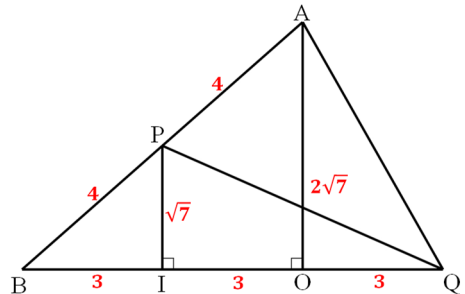
点 P から BQ に垂線を下ろし交点を I とする。 $\triangle BOA$ において, 点 P は BA の中点で, $PI \parallel AO$ だから, 点 I も BO の中点となる。

よって, $BI = IO = 3$, $PI = \sqrt{7}$ だから,

$$PQ = \sqrt{36 + 7} = \sqrt{43} \text{ cm}$$

【解答例 2】

点 Q から線分 AB に垂線を下ろし交点を H とする。



$$\triangle ABQ = \frac{1}{2} \times 9 \times 2\sqrt{7} = 9\sqrt{7} \text{ より, } \frac{1}{2} \times 8 \times QH = 9\sqrt{7} \quad QH = \frac{9\sqrt{7}}{4}$$

$$BH = \sqrt{81 - \frac{81 \times 7}{16}} = \sqrt{\frac{81 \times 9}{16}} = \frac{27}{4} \text{ cm} \quad \text{よって, } HP = \frac{27}{4} - 4 = \frac{11}{4} \text{ cm}$$

$$QP = \sqrt{\frac{121}{16} + \frac{81 \times 7}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{688} = \frac{1}{4} \times 4\sqrt{43} = \sqrt{43} \text{ cm}$$

2 (4) (4点) (正答率 0%)

【解答例 1】

Point 平行四辺形の面積公式を導いたときのあの感覚を思い出そう！

都合よく三角柱.....ではないが、少

し都合よく、 $\triangle BSP \equiv \triangle TQR$,

$\triangle BSP \parallel \triangle TQR$ である。

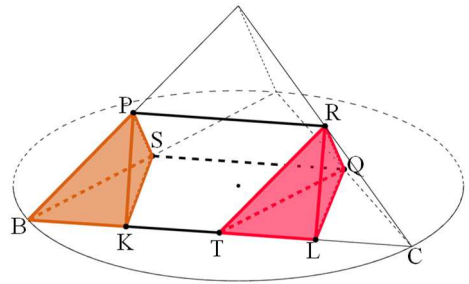
よって、点 S, Q から BC に垂線を

下ろし、交点をそれぞれ K, L とす

ると、三角錐 P-BSK \equiv 三角錐 R-TQL

である。結局、三角柱 PSK-RQL の

体積を求めればよい。



$$\triangle PSK = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times \sqrt{7} = \frac{9\sqrt{7}}{4} \quad \text{求める体積は, } \frac{9\sqrt{7}}{4} \times 3\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{21}}{4} \text{ cm}^3$$

【解答例 2】

ググるか自分で考えてください。

【コメント】

2 (2) までは計算ミスせずに解き切りたい。2 (3) は B, O, Q が同一直線上にあるかどうか分かれば余裕？ 2 (4) は、実はそんなに難しくはないのですが、時間足りない。

GeoGebra : <https://www.geogebra.org/3d/z5jpz4uj>

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>