

素早く単純な関数

範囲：関数

難易度：★×5

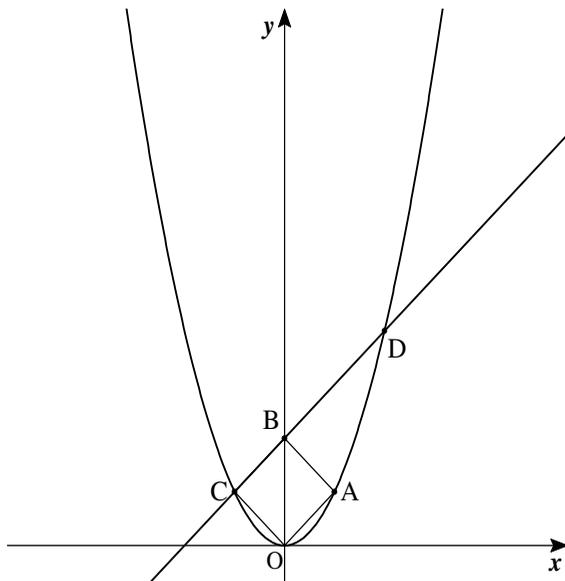
得点

/20

出典：2020年度 大阪星光学院高校

下の図のように、面積 18 の正方形 $OABC$ がある。点 O 、 A 、 C は関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあり、点 B は y 軸上にある。直線 BC と放物線の交点のうち C と異なる点を D とする。

- (1) 直線 BC の式は $y=\square$ で、 $a=\square$ である。
- (2) $\triangle OCD$ の面積は \square である。
- (3) 放物線上に点 P があり、 $\triangle OCP$ の面積は $\triangle OCD$ の面積の 2 倍である。
このとき、点 P の x 座標は \square または \square である。



【解答例】**(1) (4点×2)**

直線 BC と x 軸との交点を Q とすると、 $\triangle BOQ$ は直角二等辺三角形となる。

よって、傾き $= \frac{y \text{の増加量}}{x \text{の増加量}} = \frac{1}{1} = 1$ 、正方形 OABC の面積は 18 なので、

$$\frac{1}{2} \times OB^2 = 18, \quad OB = 6 \text{ となるので, } B(0,6), \quad BC : y = x + 6 \quad (\text{※1, 2})$$

点 A, 点 C の y 座標は 3, x 座標はそれぞれ 3, -3 になるので、

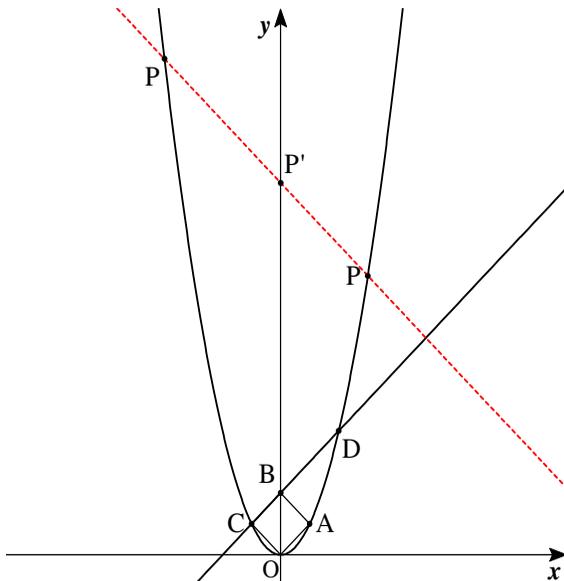
$$A(3,3) \text{ より, } 3 = 9a, \quad a = \frac{1}{3}$$

(2) (4点)

$$y = x + 6 \text{ と, } y = \frac{1}{3}x^2 \text{ の交点は, } \frac{1}{3}x^2 = x + 6, \quad x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x+3)(x-6) = 0, \quad x > 0 \text{ より, } x = 6, \quad \text{点 D の } x \text{ 座標は } 6$$

$$\triangle OCD = \triangle OBC + \triangle OBD = \frac{1}{2} \times 6 \times (3+6) = 27$$

(3) (4点×2)

点 P から OC に平行な直線
を引き交点を P' とする。

$$\triangle OCP' = 54 \text{ のとき,}$$

$$OP' = 2 \times 54 \div 3 = 36,$$

$$P'(0, 36)$$

点 P' を通り傾き -1 の直線
は, $y = -x + 36$

$$\frac{1}{3}x^2 = -x + 36, \quad \text{これを解}$$

$$\text{いて, } x = -12, \quad x = 9$$

$$P \text{ の } x \text{ 座標は } -12, 9$$

(※1) ひし形の面積の求め方、意外に忘れる。このような地味な公式（解き方）？を忘れ、2013年度センター試験数ⅠAのように惨劇が起こることがある。

(※2) 高校生になったら三角関数で、 $\tan 45^\circ = 1$ （直角二等辺三角形）だとか、 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ （正三角形）だとか覚えさせられる。私立難関高校ではこれくらい知っておけということでしょうね。ちなみに、2013年度の北海道でも知っておけという問題が出題されたことがある。困っちゃいます。

【コメント】

素早く解くべき問題です。こんな高校受けるレベルの受験生なら、瞬殺でしょうね。(1)の「直角二等辺三角形だから傾き1」は経験ないと難しいですね。高校生にとっては三角関数で常識なのですが。最近では北海道の公立高校入試ですら常識みたいな感じで出題されるので注意が必要です。

(4) もよくある等積変形です。なお、塾などで教わるかもしれない、

$\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ を用いることも可能かも。 $P\left(t, \frac{1}{3}t^2\right)$ と置いて、 $C(-3, 3)$ だから

ら、 $\frac{1}{2}|3t + t^2| = 54$ 、点Pのx座標は見た感じ $t < -3$ 、 $0 < t$ なので、

$\frac{1}{2}(t^2 + 3t) = 54$ 、 $t^2 + 3t - 108 = 0$ 、以下省略

絶対値の扱いがやや面倒だから、これは高校生用だな。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>