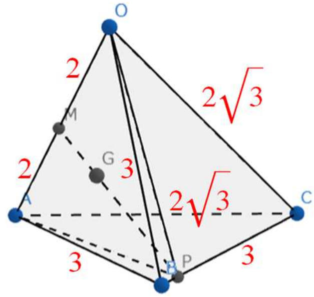
出典：2022 年度　京都大学

四面体 OABC が，OA＝4，OB＝AB＝BC＝3，OC＝AC＝$2\sqrt{3}$ を満たしているとする。P を辺 BC 上の点とし，△OAP の重心を G とする。このとき，次の各問いに答えよ。

（1）$\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

（2）P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ。

【解答例１　かなり脳漿炸裂，パワープレイ】



(1)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\mathrm{OC}=\vec{c}$とする。

△OBC において，点 P は辺 BC 上の点だから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\quad(0\leq t\leq 1)$　と表される。

点 G は△ OAP の重心だから，

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{3}=\dfrac{\vec{a}+t\vec{b}+(1-t)\vec{c}}{3}$なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\vec{a}-2t\vec{b}-2(1-t)\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\left(|\vec{a}|^2-2t\vec{a}\bullet\vec{b}-2(1-t)\vec{c}\bullet\vec{a}\right)$$

ここで余弦定理より

$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{9-16-9}{-2\bullet 4\bullet 3}=\dfrac{2}{3}$だから，$\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=8$

同様に，$\vec{c}\bullet\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos\angle\mathrm{COA}=8$

$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{3}\left(16-16t-16(1-t)\right)=0$　となるので，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(2)

同様に，$\vec{b}\bullet\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BOC}=6$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|^2=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+4t^2|\vec{b}|^2+4(1-t)^2|\vec{c}|^2-4t\vec{a}\bullet\vec{b}+8t(1-t)\vec{b}\bullet\vec{c}-4(1-t)\vec{c}\bullet\vec{a}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(16+36t^2+48(1-t)^2-32t+48t(1-t)-32(1-t)\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(36t^2-48t+32\right)=4\left(t^2-\frac{4}{3}t+\frac{8}{9}\right)=4\left(\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right)$$

$0\leq t\leq 1$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|^2$は$t=\dfrac{2}{3}$で最小値をとり，そのとき，$\mathrm{PG}=\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}$

（※1）

馬鹿みたいに余弦定理を用いているが，もっと楽に内積を求める方法がある。

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = 3$ であるから，

$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \bullet \vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 = 9$，$16 - 2\vec{a} \bullet \vec{b} + 9 = 9$，$\vec{a} \bullet \vec{b} = 8$

同様に，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \left|\vec{c} - \vec{b}\right| = 3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| = |\vec{c} - \vec{a}| = 2\sqrt{3}$から，$\vec{b} \bullet \vec{c} = 6$，$\vec{c} \bullet \vec{a} = 8$

計算ミスが防げる。ほとんどのネット上に転がっている解答例にはこれが載っている。

（※2）

アホみたいに$\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|^2$を計算しているが，（1）を利用して楽をする方法もある。

点 G は△OAP の重心であることから，OA の中点を M とすると，（1）より PG⊥OA なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|^2 = \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|^2 = \frac{4}{9}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|^2\right) = \frac{4}{9}\left(\left(t\vec{b} + (1-t)\vec{c}\right)^2 - \left|\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2\right)$$

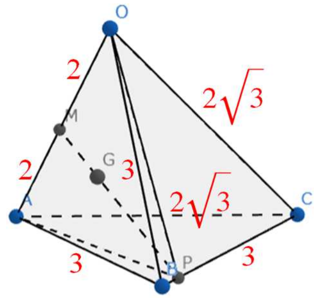
$$= \frac{4}{9}\left(t^2\left|\vec{b}\right|^2 + 2t(1-t)\vec{b} \bullet \vec{c} + (1-t)^2|\vec{c}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{a}|^2\right)$$

$$= \frac{4}{9}\left(9t^2 + 12t(1-t) + 12(1-t)^2 - 4\right) = \frac{4}{9}\left(9t^2 - 12t + 8\right)$$

$$= 4\left(t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{8}{9}\right) = 4\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{16}{9}$$

計算ミスが減る。（※1）（※2）ができていれば，パワープレイなんて言われない。

【解答例２　数学と真摯に向き合ってきた人間】



(1)

OA の中点を M とすると，$\overrightarrow{PG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PM}$で，

$\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$のとき，$\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{OA}$となる。
△ABP と△OBP において，AB＝OB，
△ABC≡△OBC より∠ABP＝∠OBP，
BP は共通となるから，△ABP≡△OBP，よって△PAO において PA＝PO となるので，$\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{OA}$（※），すなわち，$\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$

※500 億年ぶりくらいに「二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に二等分する」を用いる。

(2)

$|PG|^2=\dfrac{4}{9}|PM|^2=\dfrac{4}{9}\left||OP|^2-4\right|$，$|OP|$が最小のとき，$|PG|$も最小となる。

$\left(2\sqrt{3}\right)^2<3^2+3^2$なので，△OBC は鋭角三角形だから（※）

$|OP|$が最小のとき，OP⊥BC となる。
このとき，OC の中点を N とすると，$BN=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$,

$\triangle BOC=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2}$ だから，$\dfrac{1}{2}\times 3\times OP=3\sqrt{2}$なので，

$OP=2\sqrt{2}$，よって PG の最小値は，$\sqrt{\dfrac{4}{9}(8-4)}=\dfrac{4}{3}$

※∠OBC が鈍角だと，点 P はあくまでも線分 BC 上の点なので，OP⊥BC になれない，なので書いておく。

【コメント】

ブログでは高校入試を主に解説しておりますが，たまに大学入試も解説することによって「中学数学と高校数学は基本別物だが，空間図形においては中学・高校入試で頑張った分の貯金がクリティカルヒットする場合がある」ことを紹介しております。高校入試で難問をたくさん解いた経験は，意外な所で役立ったりします。

だからその紹介がメインです，大学入試に関しては私の何億倍も頭良い方が何億人もいるので，そちらのサイトとかテキストとか講師を参考にしてください。ぶっちゃけ「高校入試の問題と解説を PDF にする」人間は何故か少なかったので，勝てそうだったから参入しただけです。大学入試は無理，絶対に負ける。

空間図形は作られる問題が限られているので，頑張れば中学生でも解ける問題も存在します（ただし簡単とは言っていません）。この問題もそうですね，頑張れば日比谷高校なんかでも出題できそうです（ただし簡単とは言っていません）。

（1）の問題文がベクトル表示なので，普通の心が綺麗な人間なら，空間ベクトルで解こうとするのが普通です。私もそうです。しかしこれは罠(？)，ベクトルを使ってしまうと結構面倒くさい……いやそれでも京大の問題にしては楽か？

だからって【解答例 2】も怪しい。中学生でも理解できそうですが，これは大学入試です。京大は数学以外にも国語，理科，英語も勉強しなくてはなりませんし，求められる知識量が段違いですから，中学生の心なんて普通は忘れています。中学生時代に物凄く高校入試の空間図形問題を頑張っていて，そのときの記憶が引き出せれば何とかなるかもしれませんが。または，趣味で日比谷高校の問題解くような変態なら思いつきそうですが，そんな奴危険です。女友達にドン引きされます。男友達にもドン引きされます。友達 0 でも誰かしらにドン引きされます。

京大の中でも簡単な問題なので確実に正答したいですが，どこかしらでミスっちまった受験生はそれなりにいそうです。これくらいの実は簡単な問題は差がついてしまって，嫌な問題ですね。ドンマイ。

一応 GeoGebra で図を作っておきました。https://www.geogebra.org/3d/hbjaf4qb
見たい方はどうぞ。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/