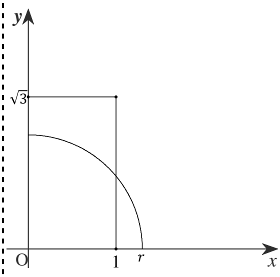
2022年度　東北大学

半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

【解答例】

直円柱の底面の円の中心を O とする。直円柱と（直円柱と内部で共通部分を持つ）半球は，右図において，円の一部と長方形を，y 軸を軸に回転させてできる図形である。

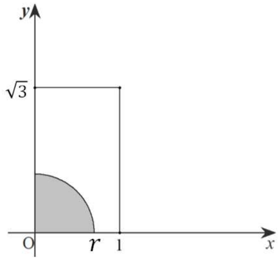


I）$0 < r \leq 1$のとき，

図の網掛け部分を回転させてできる図形（半球）となるので，

$$V(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \boldsymbol{\frac{2\pi r^3}{3}}$$

I）$0 < r \leq 1$



II）$1 \leq r \leq \sqrt{3}$のとき，

$V(r)$

$$= \pi\sqrt{r^2-1} + \pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{r}\left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^2 dy$$

①　　　　②

$$= \pi\sqrt{r^2-1} + \pi\left[r^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{\sqrt{r^2-1}}^{r}$$

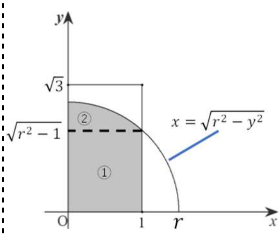
$$= \pi\sqrt{r^2-1}$$

$$+ \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3} - \pi r^2\sqrt{r^2-1} + \frac{\pi\left(r^2-1\right)\sqrt{r^2-1}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi\sqrt{r^2-1}\left(1 - r^2 - \frac{1}{3} + \frac{r^2}{3}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi\left(r^3 + \pi\sqrt{r^2-1}\left(1-r^2\right)\right)}$$

II）$1 \leq r \leq \sqrt{3}$



III） $\sqrt{3} \le r \le 2$のとき，

$V(r)$

$$= \pi\sqrt{r^2-1} + \pi\int_{\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{r^2-y^2}\right)^2 dy$$

①　　　　　　②

$$= \pi\sqrt{r^2-1}$$

$$+\sqrt{3}r^2 - \sqrt{3} - \pi r^2\sqrt{r^2-1} + \frac{\pi\left(r^2-1\right)\sqrt{r^2-1}}{3}$$

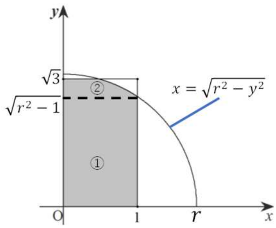
$$= \pi\left(r^2-1\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{r^2-1} + \frac{\sqrt{r^2-1}}{3}\right)$$

$$= \boldsymbol{\pi\left(r^2-1\right)\left(\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{r^2-1}\right)}$$

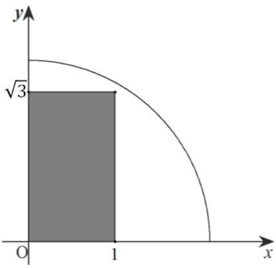
IV) $2 \le r$のとき，

円柱の体積となるから，$V(r) = \boldsymbol{\sqrt{3}\pi}$

III） $\sqrt{3} \le r \le 2$



IV) $2 \le r$



【コメント】

数学 III の最後当たりで出てくる回転体の積分です。円柱，球なので，回転体で考えるということがポイント。こういう問題は，中学・高校入試でいかに空間図形の問題を演習したかが試されています。中学・高校入試で解きまくった子なら，こういう問題もすんなり頭に入ります。頭の中で空間図形を都合よく分解することができます。

回転体を考え，適切に軸を取ればそこまで難しくないのですが，場合分けが 4 つ，さらに計算もそこまで単純ではないので（積分自体は超簡単），時間がかかりますね。できそうでできない，または空間図形の積分だから捨てた，そんな受験生が多かったのでは。

【作成】高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/