嫌らしい小問集合		
範囲：小問集合	難易度：★×6	得点　　　　/36

出典：2023 年度　大阪府 C　大問 1※(8)除く

次の問いに答えなさい。

(1)　$-a\times(2ab)^2\div\left(-\frac{2}{3}ab^2\right)$ を計算しなさい。

(2)　$\frac{6+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}+\left(2-\sqrt{2}\right)^2$　を計算しなさい。

(3)　aを 0 でない定数とする。xの二次方程式　$ax^2+4x-7a-16=0$ の一つの解が $x=3$ であるとき，a の値を求めなさい。また，この方程式のもう一つの解を求めなさい。

(4)　a，b，c，d を定数とし，$a>0$，$b<0$，$c<d$ とする。関数 $y=ax^2$ と関数 $y=bx+1$ について，x の変域が $-3\leqq x\leqq 1$ のときの y の変域がともに $c\leqq y\leqq d$ であるとき，a，b の値を求めなさい。

(5)　n を自然数とする。$n\leqq\sqrt{x}\leqq n+1$ を満たす自然数 x の個数が 100 であるときの n の値を求めなさい。

(6)　二つの箱A，Bがある。箱Aには1から4までの自然数が書いてある4枚のカード$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$が入っており，箱Bには4から8までの自然数が書いてある5枚のカード$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$，$\boxed{7}$，$\boxed{8}$が入っている。A，Bそれぞれの箱から同時にカードを1枚ずつ取り出し，箱Aから取り出したカードに書いてある数をa，箱Bから取り出したカードに書いてある数をbとして，次の**きまり**にしたがって得点を決めるとき，得点が偶数である確率はいくらですか。A，Bそれぞれの箱において，どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとして答えなさい。

きまり：aとbの最大公約数が1の場合は$a+b$の値を得点とし，aとbの最大公約数が1以外の場合は$\sqrt{2ab}$の値を得点とする。

(7)　aを一の位の数が0でない2けたの自然数とし，bをaの十の位の数と一の位の数とを入れかえてできる自然数とするとき，$\dfrac{b^2-a^2}{99}$の値が24であるaの値を**すべて**求めなさい。

【解答例】

（1）（4 点）

$$-a\times(2ab)^2\div\left(-\frac{2}{3}ab^2\right)=-a\times4a^2b^2\times\left(-\frac{3}{2ab^2}\right)=\frac{12a^3b^2}{2ab^2}=\mathbf{6a^2}$$

（2）（4 点）

$$\frac{6+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}+\left(2-\sqrt{2}\right)^2=\frac{6}{\sqrt{2}}+2+4-4\sqrt{2}+2=\mathbf{8-\sqrt{2}}$$

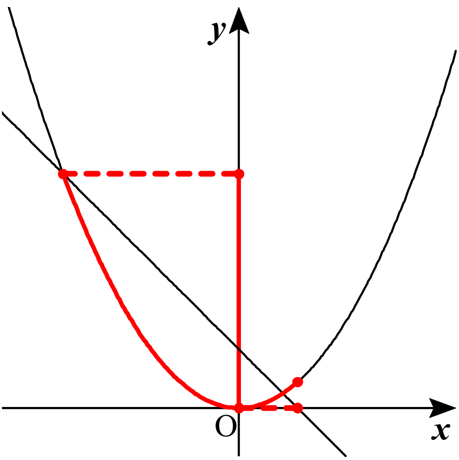
（3）（完 5 点）

$ax^2+4x-7a-16=0$ に，$x=3$を代入して，$9a+12-7a-16=0$，**$a=2$**

$2x^2+4x-14-16=0$，整理して，$x^2+2x-15=0$，$(x-3)(x+5)=0$

もう一つの解は，**$x=-5$**

（4）（完 5 点）要注意問題



$a>0$，$b<0$ なので，グラフ概形は左図のようになる。

$-3\leqq x\leqq1$ で，どちらも最小値は c，最大値は d であるが，

$y=ax^2$は，$x=0$ で最小値をとる。

よって，

$y=ax^2$に $x=-3$，$x=0$ を代入し，

$d=9a$，$c=0$

$y=bx+1$に $x=-3$，$x=1$ を代入し，$d=-3b+1$，$c=b+1$

よって，**$b=-1$**

$9a=4$ より，**$a=\frac{4}{9}$**

【コメント】（4）はよくあるひっかけ問題なはずなのですが，文字で出題されることによって結構間違えた人多いのではないのでしょうか。そうだと信じたい，私今回の問題で唯一間違えました。かなり恥ずかしい。地味に（5）（6）（7）もかなりシンドイですよね。流石大阪府 C。

(5)（6 点）

例えば，$1 \leqq \sqrt{x} \leqq 2$なら x の個数は 1～4 の 4 個（4－1＋1＝4）

$3 \leqq \sqrt{x} \leqq 4$なら，x の個数は 9～16 の 8 個（16－9＋1＝8）となる。

各辺を 2 乗し，$n^2 \leqq x \leqq (n+1)^2$　（※）

$(n+1)^2 - n^2 + 1 = 100$ となればよいので，$2n+2=100$，$\boldsymbol{n=49}$

※中学範囲では気にする必要ないが，2 乗する際は不等号の向きに注意。

　今回は各辺＞0 なのでそのままの向きで良い。負になる場合注意。

(6)（6 点）

そんなに数も多くないので，大人しく書き出す。

１－４	２－４●	３－４	４－４	答えは，
５●	５	５●	５	$\boldsymbol{\frac{7}{20}}$
６	６	６●	６	
７●	７	７●	７	
８	８	８	８●	

例えば， １－５は最大公約数が 1 なので，1+5＝6（偶数）

　　　　２－４は最大公約数が 2 なので，$\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 4}$＝4（偶数）

(7)（6 点）

x, yを自然数とし$(y > x)$，$a = 10x + y$，$b = 10y + x$ と置く。

$$\frac{(b+a)(b-a)}{99} = \frac{(11x+11y)(9y-9x)}{99} = (x+y)(y-x) = 24$$

$x + y > y - x$，$24 =$ ①$24 \times 1$，②$12 \times 2$，③$8 \times 3$，④$6 \times 4$

①$x + y = 24$，$y - x = 1$，$y = 13, x = 11$ ……と代入していくと, 無理なことがすぐ分かる。

②$x + y = 12$，$y - x = 2$，$y = 7, x = 5$ とすぐ満たすことが分かる。

③は無理，④は$y = 5, x = 1$となるので，求める自然数は，***a*＝57, 15**