かなり嫌な空間図形

範囲：中 3 空間図形	難易度：★×6	得点　　　　　/24

出典：2023 年度　大阪府 C

図 I, 図 II において，立体 ABCD-EFGH は六つの平面で囲まれてできた立体である。四角形 ABCD は，1 辺の長さが 2 cm の正方形である。四角形 EFGH は，EF＝6 cm，FG＝4 cm の長方形である。平面 ABCD と平面 EFGH は平行である。四角形 AEFB は AB//EF の台形であり，AE＝BF＝4 cm である。四角形 DHGC≡四角形 AEFB である。四角形 BFGC は BC//FG の台形である。
四角形 AEHD≡四角形 BFGC である。次の問いに答えなさい。

図 I

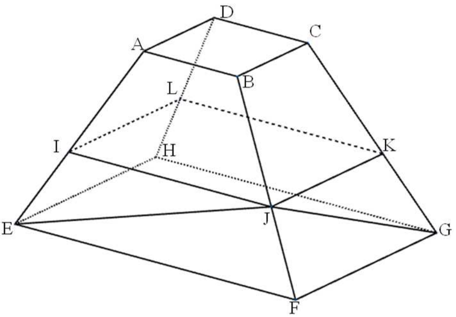
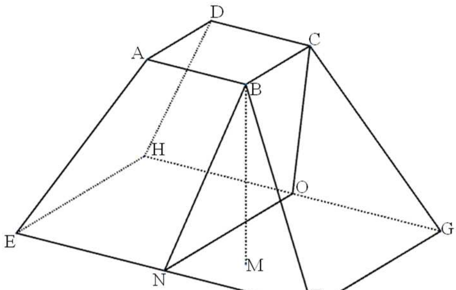


図 II



(1) 図 I において，四角形 IJKL は長方形であり，I，J，K，L はそれぞれ辺 AE，BF，CG，DH 上にある。このとき AI＝BJ＝CK＝DL である。E と J，G と J とをそれぞれ結ぶ。

① 次のア～オのうち，辺 BF とねじれの位置にある辺はどれですか。すべて選び，記号を○で囲みなさい。

ア，辺 AB　　イ，辺 EH　　ウ，辺 CG　　エ，辺 GH　　オ，辺 DH

② △JFG の面積は△JEF の面積の何倍ですか。

③ 四角形 IJKL の周の長さが 15 cm であるときの辺 JK の長さを求めなさい。

(2) 図 II において，M は B から平面 EFGH にひいた垂線と平面 EFGH との交点である。N，O は，それぞれ辺 EF，HG の中点である。このとき，4 点 B，N，O，C は同じ平面上にあり，この 4 点を結んでできる四角形 BNOC は BC//NO の台形である。

① 線分 BM の長さを求めなさい。

② 立体 ABCD-ENOH の体積を求めなさい。

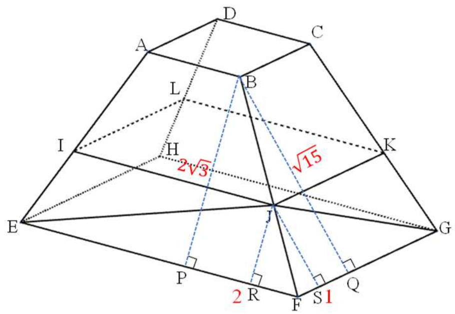
【解答例】

（1）①（4点）

AB//BF，直線CGと直線BFは交わってしまうので，これら以外がねじれの位置。

イ　エ　オ

（1）②（4点）＜要注意問題＞



BF＝4(問題文より)

△JFGと△JEFの底辺比は4：6＝2：3

高さの比は

点BからEF，FGに垂線を下ろし交点をP，Q

点JからEF，FGに垂線を下ろし交点をR，S

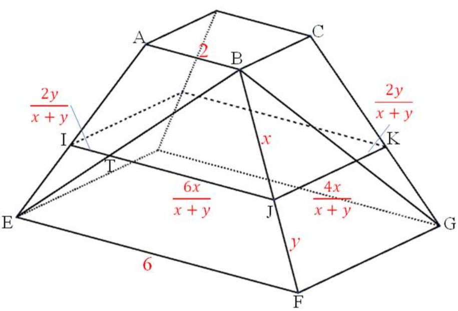
とすると，BP＝$2\sqrt{3}$，BQ＝$\sqrt{15}$となるので，

（△FJR∽△FBP，△FJS∽△FBQより）

同様に，JS：JR＝$\sqrt{15}$：$2\sqrt{3}$＝$\sqrt{5}$：2となる。

よって，$\dfrac{\triangle JFG}{\triangle JEF}=\dfrac{2\times\sqrt{5}}{3\times 2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$**倍**

（1）③（6点）



BJ＝x，JF＝yと置く（※x＋y＝4）

BEとIJの交点をTとする。

△BTJ∽△BEFより，TJ：6 = x : $(x+y)$

$$TJ=\frac{6x}{x+y}$$

同様に求めていくことで，左図のようになる。

$$IJ=\frac{6x+2y}{x+y},\quad JK=\frac{4x+2y}{x+y}$$

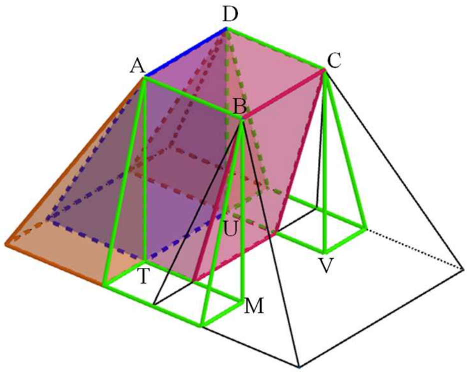
$$IJ+JK=\frac{10x+4y}{x+y}=\frac{10x+4(4-x)}{4}=\frac{6x+16}{4}=\frac{3x+8}{2}=\frac{15}{2},\quad 3x+8=15,\quad x=\frac{7}{3}$$

$$JK=\left\{4\times\frac{7}{3}+2\left(4-\frac{7}{3}\right)\right\}\div 4=\boldsymbol{\frac{19}{6}\ \mathrm{cm}}$$

（2）①（4点）

MF＝$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，BM＝$\sqrt{BF^2-MF^2}=\sqrt{4^2-5}=$ **$\sqrt{11}$ cm**

（2）②（6点）※色々あると思うので気になったら「正四角錐台」とでもググってください



点 A, D, C から平面 EFGH に垂線を下ろし，交点を T，U，V とする。四角形 MTUV は正方形となる。

直線 MT，TU，UV，VM を引き立体 ABCD-ENOH を分割すると，左図のように，オレンジ色の四角錐 2 つ, 青色の四角柱 1 つ, ピンクの四角柱 1 つ,

緑の三角柱から四角錐を引いたもの 2 つ

オレンジ色の四角錐：$\frac{1}{3}\times1\times2\times\sqrt{11}=\frac{2}{3}\sqrt{11}$，青色の三角柱：$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{11}\times2=2\sqrt{11}$

ピンクの四角柱：$\frac{1}{2}\times(2+1)\times\sqrt{11}\times2=3\sqrt{11}$

緑色の三角柱から四角錐を引いたもの：$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{11}\times2-\frac{1}{3}\times1\times1\times\sqrt{11}=\frac{2\sqrt{11}}{3}$

したがって求める体積は，$\left(\frac{4}{3}+2+3+\frac{4}{3}\right)\sqrt{11}=$ $\mathbf{\frac{23\sqrt{11}}{3}\,cm^3}$

【コメント】

例年より注意力が求められる問題でした。例年より簡単か難しいかは分かりません。満点の人は結構多そう？

（1）②は要注意です。高さも異なります。（1）③は中々面白い問題ですね。

（2）①は誘導です。②はどうしましょうね。大人しく分割した方が求めやすそうですが，計算ミス多発しそうです。というか私は多発しました。類題として，

2011 年度北海道：https://hokkaimath.jp/blog-entry-175.html

があります。