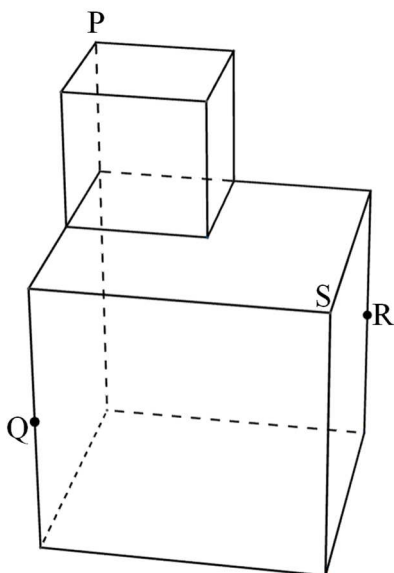


立方体切断の応用			
範囲：空間図形	難易度：★×5	得点	/10

出典：2021 年度 四天王寺高校

図のように、1 辺の長さが 5 cm と 10 cm の 2 個の立方体を重ねた立体があります。点 P と点 S はこの立体の頂点で、点 Q と点 R はこの立体の辺の中点です。この立体を 3 点 P, Q, R を通る平面で切って 2 つの立体に分けます。

(1) 図に切り口の形をかき入れ、切り口に斜線を入れなさい。



(2) 頂点 S を含む方の立体の体積は、元の立体の体積の何倍になりますか。

【(2) のヒント】

GeoGebra で自由に図形をいじってみよう。 <https://www.geogebra.org/3d/j6rqm2zh>

※塾・教育関係者が，私の作成した PDF・画像をネット(Twitter など)上に無断転載することを固く禁じます。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>

【解答例】

(1) (5点)

①、同じ面にある2点は結ぶ

PとQ, PとRが結べる

②、向かい合う面にある線分は平行

PR//QT, PQ//RUとなるように結ぶ

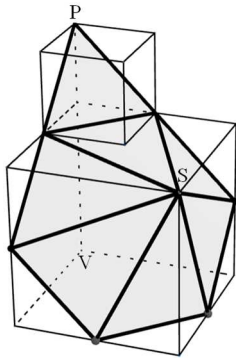
TとUは同じ面, そのまま結ぶ

色塗りを忘れずに!

※当たり前だが, TとUという文字は書かなくて良い。

(2) (5点)

元の立体の体積は, $5^3 + 2^3 \times 5^3 = 9 \cdot 5^3$



①、1辺の長さが5cmの方の立方体

立方体から三角錐が取り除かれていると思えばよい。

$$5^3 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 5^3 = \frac{5}{6} \times 5^3$$

②、1辺の長さが10cmの方の立方体

正六角錐+3つの三角柱と思えばよい。

②-1、3つの三角柱の体積

$$3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 5^2 \times 10 = 5^3$$

②-2、正六角錐

底面が $5\sqrt{2}$ cmの正六角形なので, 底面積は一辺が $5\sqrt{2}$ cmの正三角形6つと考えればよい。

$$6 \times \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times \frac{5}{2}\sqrt{6} = 75\sqrt{3}$$

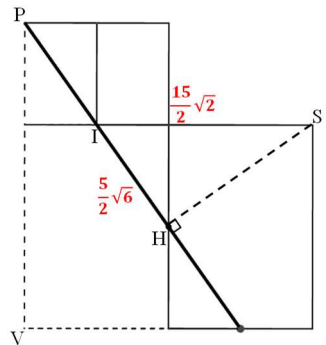
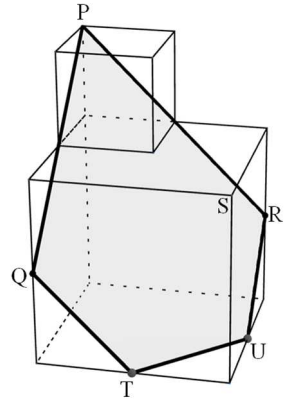
高さはP, S, Vを通る平面で考える。点Sから3点P, Q, Rを通る平面(太線)に垂線を下ろし交点をHとする。

$$IS = \frac{15}{2}\sqrt{2}, IH = \frac{5}{2}\sqrt{6} \text{なので, } SH = 5\sqrt{3}$$

正六角錐の体積は, $\frac{1}{3} \times 75\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 3 \times 5^3$

よって, 切断後点Sを含む立体の体積は, $\left(\frac{5}{6} + 1 + 3\right) 5^3 = \frac{29}{6} \times 5^3$

$$\frac{29}{6} \div 9 = \frac{29}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{29}{54} \text{ 倍}$$



※塾・教育関係者が, 私の作成したPDF・画像をネット(Twitter など)上に無断転載することを固く禁じます。

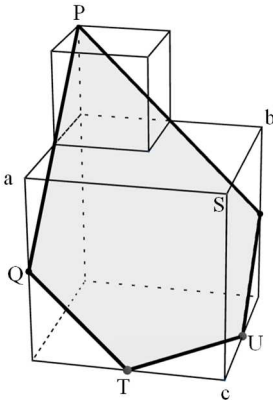
【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>

【コメント】

たぶん GeoGebra で色々見てみたら、理解は容易なはず。パソコンやタブレットで垂線引いてみてください。

なお、点 H が立体の中心なので、下の立方体を切断すると、体積半分 ($2^2 \times 5^3$) ということを知っていたら、素早く解けるかも。

【いないと思うが】



SH の長さはベクトルだと機械的に求められる……いやそうでもないか。 $\overrightarrow{Sa} = \vec{a}$, $\overrightarrow{Sb} = \vec{b}$, $\overrightarrow{Sc} = \vec{c}$ とする。面倒なので、下の立方体の一辺の長さは $10\text{ cm} \rightarrow 1$ と一旦する。

$$\overrightarrow{SQ} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{SU} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c},$$

$$\overrightarrow{TU} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{QT} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{SH} = s\overrightarrow{SQ} + t\overrightarrow{ST} + u\overrightarrow{SU} \text{ とすると,}$$

$$\left(= \left(s + \frac{1}{2}t\right)\vec{a} + \frac{1}{2}u\vec{b} + \left(\frac{1}{2}s + t + u\right)\vec{c} \right)$$

$$s + t + u = 1, \quad \overrightarrow{TU} \cdot \overrightarrow{SH} = 0, \quad \overrightarrow{QT} \cdot \overrightarrow{SH} = 0$$

$$\overrightarrow{TU} \cdot \overrightarrow{SH} = \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\left(s + \frac{1}{2}t\right)\vec{a} + \frac{1}{2}u\vec{b} + \left(\frac{1}{2}s + t + u\right)\vec{c}\right) = 0, \quad \frac{1}{4}u - \frac{1}{2}s - \frac{1}{4}t = 0$$

$$\overrightarrow{QT} \cdot \overrightarrow{SH} = \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\left(s + \frac{1}{2}t\right)\vec{a} + \frac{1}{2}u\vec{b} + \left(\frac{1}{2}s + t + u\right)\vec{c}\right) = 0, \quad -\frac{1}{4}s + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}u = 0$$

$$\text{これを解いて, } s = 1, \quad t = -1, \quad u = 1, \quad \overrightarrow{SH} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

よって、SH の長さは、

$$|\overrightarrow{SH}| = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \quad \text{と、機械的に理解できる！たぶん！}$$