激ヤバ計算小問集合

範囲：小問集合	難易度：★×7	得点　　　/18

出典：2023 年度　灘高校

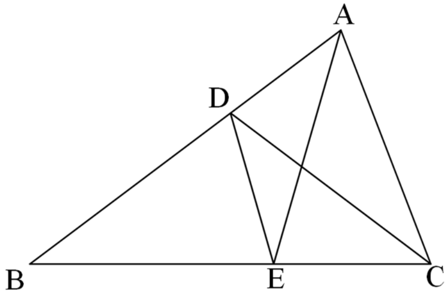
次の$\boxed{}$内に適する数を記入せよ。

(1) $\left(\sqrt{100+\sqrt{9991}}+\sqrt{100-\sqrt{9991}}\right)^2$ を計算して簡単にすると$\boxed{}$であり，$2\sqrt{100+\sqrt{9991}}-\sqrt{206}$ を計算して簡単にすると$\boxed{}$である。

(2) x の方程式 $x^2+x-n+1=0$ が整数解をもつような整数 n のうち，n－2023 の絶対値が最も小さいものは$\boxed{}$である。

(3) 1 から 9 までの数が書かれたカードが，それぞれ 1 枚ずつ合計 9 枚ある。この 9 枚のカードから 4 枚のカードを取り出す。取り出した 4 枚のうち，いずれか 3 枚に書かれてある数の和が 10 の倍数になり，残りの 1 枚に書かれている数が a のとき，得点を a 点とする。また，取り出した 4 枚のうち，どの 3 枚に書かれている数の和も 10 の倍数にならないとき，得点を 0 点とする。0 点，1 点，…，9 点のうち，起こる確率が最も小さい得点は$\boxed{}$点であり，そのときの確率は$\boxed{}$である。

(4) 右の図において，BD＝DC＝CA，BE＝EA である。∠DEA の大きさが 32 度のとき，∠ABC の大きさは$\boxed{}$度である。



【ヒント】

（1）1 つめの結果を 2 つめでも使う。分子の有理化……は数学３の知識が無いと絶対に思いつかない。

（2）$n-2023=k$ と置くと，$n=k+2023$

【解答例】

（1）（2 点＋3 点）

$$\left(\sqrt{100+\sqrt{9991}}+\sqrt{100-\sqrt{9991}}\right)^2$$

$$=\left(100+\sqrt{9991}\right)+2\sqrt{\left(100+\sqrt{9991}\right)\left(100-\sqrt{9991}\right)}+\left(100-\sqrt{9991}\right)$$

$$=200+2\sqrt{100^2-9991}=200+2\times 3=\mathbf{206}$$

この結果から，$\sqrt{100+\sqrt{9991}}+\sqrt{100-\sqrt{9991}}=\sqrt{206}$ なので

$$2\sqrt{100+\sqrt{9991}}-\sqrt{206}$$

$$=2\sqrt{100+\sqrt{9991}}-\left(\sqrt{100+\sqrt{9991}}+\sqrt{100-\sqrt{9991}}\right)$$

$$=\sqrt{100+\sqrt{9991}}-\sqrt{100-\sqrt{9991}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{100+\sqrt{9991}}-\sqrt{100-\sqrt{9991}}\right)\left(\sqrt{100+\sqrt{9991}}+\sqrt{100-\sqrt{9991}}\right)}{\sqrt{100+\sqrt{9991}}+\sqrt{100-\sqrt{9991}}}$$

$$=\frac{\left(100+\sqrt{9991}\right)-\left(100-\sqrt{9991}\right)}{\sqrt{206}}$$

$$=\frac{2\sqrt{9991}}{\sqrt{206}}=\frac{2\sqrt{103}\times\sqrt{97}}{\sqrt{103}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{97}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{194}}$$

もっと良い解法がある気がします。2 乗－2 乗はよく聞きますね。

（**2**）（**4** 点）

$x^2 + x - n + 1 = 0$ を解くと，$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$

xが整数になるとき，$\sqrt{4n-3}$は奇数となる。

$n - 2023 = k$と置くと，$n = k + 2023$，絶対値 k が小さければよい。

$\sqrt{4n-3} = \sqrt{4(k+2023)-3} = \sqrt{4k+8089}$

8089 に近い数を思い出すが，ここで，$90^2 = 8100$ であることはすぐ思いだす。$89^2 = 7921$，$91^2 = 8281$

絶対値 k が最も小さくなるとき，$4k + 8089 = 7921$，$k = -42$

$k = -42$ のとき，$\boldsymbol{n = 1981}$

（**3**）（完 **5** 点）

4 枚のカードの取り出し方は，${}_9C_4 = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$ 通り

10 の倍数になる 3 枚の組み合わせを考える。

【10】

1－2－7	2－3－5
1－3－6	
1－4－5	

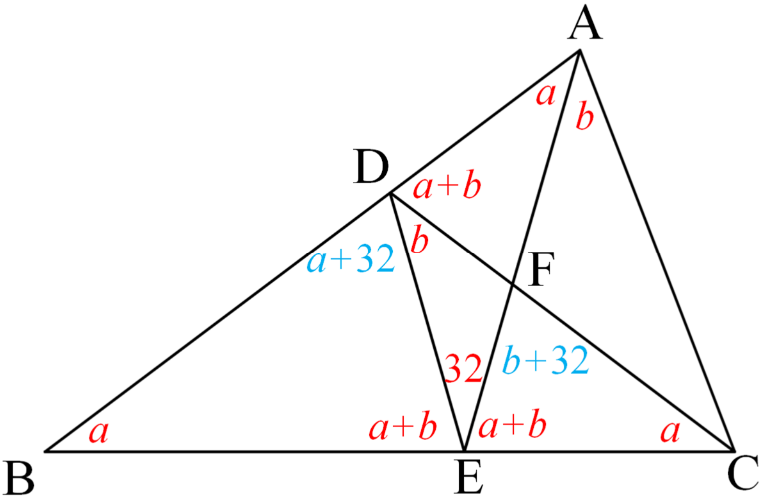
【20】

3－8－9	4－7－9	5－6－9
		5－7－8

10 の倍数になるのは 8 通り，そのうち 4 通りは 5 が必要である，5 は得点になりづらい。よって，起こる確率が最も小さい得点は**5 点**

その確率は，$\dfrac{4}{126} = \boldsymbol{\dfrac{2}{63}}$

（4）（4 点）



∠ABC＝a と置くと，二等辺三角形の底角が等しいことを利用して，

∠EAB＝∠DCB＝a，よって，4 点 A，C，D，E は同一円周上にあることが分かる。∠EAC＝b と置き，二等辺三角形や円周角の定理を用いて角度を書き込んでいく。

三角形の外角はそれと隣り合わない二つの内角の和に等しいから，

∠BDE＝a＋32，∠CFE＝b＋32，△DBE∽△FCE なので，

∠BDE＝∠CFE となる。a＝b となる。4a＋32＝180，a＝37　**37 度**

【コメント】

　例年より難しいですね。

（1）これが正攻法なのでしょうか。とても中高生に思いつく解法じゃない気がします。数３で分子の有理化を習った後なら解けそうですが。灘志望なら余裕で解くのか？すごい。

（2） も地味に厳しい。代入です。

（3）は簡単かと思いきや，コンビネーション使わないとシンドイと思われます。使わない解法考えるの諦めました。難関私立受けるような子ならコンビネーション知ってるでしょ！

（4） は簡単です。方べきの定理の経験があれば楽勝。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/