

よく分かんない問題(中線定理)

範囲：中3平面図形？

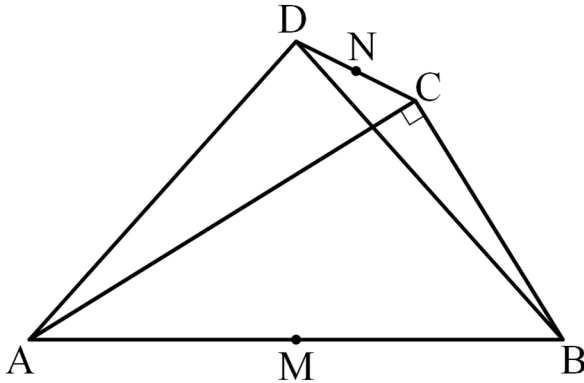
難易度：??????

得点

/16

出典：平成23年度 日本大学第二高校

下の図のように、底辺 AB が共通な直角三角形 ABC と二等辺三角形 ABD がある。 $\angle C=90^\circ$ ， $AD=BD=12$ ， $CD=4$ とする。 AB の中点を M ， CD の中点を N とするとき、次の各問いに答えよ。



- (1) $AB=16$ のとき、二等辺三角形 ABD の面積を求めよ。
- (2) CM^2+DM^2 の値を求めよ。
- (3) MN の長さを求めよ。

【解答例】**(1) (5点)**

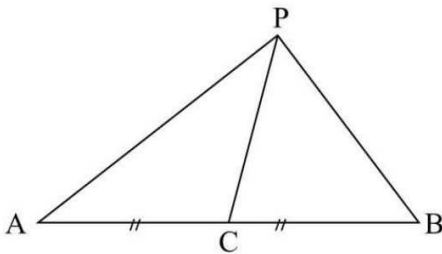
直角三角形ADMにおいて、AM=8だから、 $DM = \sqrt{144 - 64} = 4\sqrt{5}$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 16 \times 4\sqrt{5} = 32\sqrt{5}$$

(2) (5点)

3点A, B, Cを通る円を考えると、 $\angle ACB = 90^\circ$ より、ABは直径となる。
よって、AM=BM=CM

$$DM^2 = AD^2 - AM^2 = AD^2 - CM^2 \quad \text{すなわち、} \quad CM^2 + DM^2 = AD^2 = 144$$

(3) (6点)**【解法1】中線定理****中線定理**

$$PA^2 + PB^2 = 2(PC^2 + CB^2)$$

私立受けるなら、高校範囲の中線定理も知っているはず(?)なので、これを用いる。というかこれが正攻法としか思えない?

△MDCで、

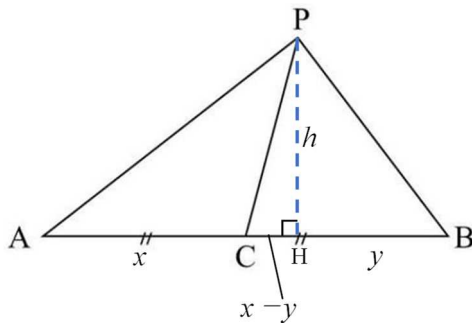
$$MC^2 + MD^2 = 2(MN^2 + CN^2)$$

$$144 = 2(MN^2 + 4)$$

$$MN^2 = 68 \quad MN = 2\sqrt{17}$$

<https://hokkaimath.jp/blog-entry-223.html> この広島の問題で、高校範囲での証明を載せたが、一応中学生でも分かる証明はできないこともない。

右の△PABで、点CはABの中点。
 点Pから辺ABに垂線を下ろし交
 点をHとする。PH=h, AC=BC=x,
 BH=yと置く。



$$PC^2 = h^2 + (x - y)^2$$

$$PA^2 = (2x - y)^2 + h^2$$

$$PB^2 = y^2 + h^2 \quad \text{であるから,}$$

$$PC^2 = h^2 + (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + h^2$$

$$PA^2 + PB^2$$

$$= 4x^2 - 4xy + y^2 + h^2 + y^2 + h^2$$

$$= 4x^2 - 4xy + 2y^2 + 2h^2$$

$$= 2(x^2 - 2xy + y^2 + h^2) + 2x^2$$

$$= 2PC^2 + 2x^2$$

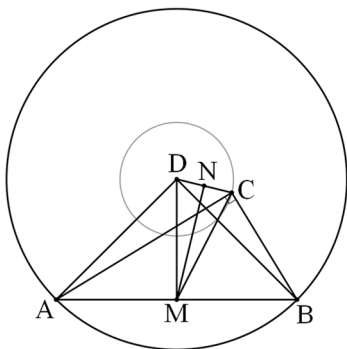
$$= 2(PC^2 + CB^2)$$

※あえて座標を使わないでみたが、高校2年で習う(?)

<http://awayajuku.blog81.fc2.com/blog-entry-312.html>

のように証明した方が中学生にも分かりやすい?

【解法2】任意のAB



問題文から、ABの長さがどうであろうがMNの長さは一定(※)と判断できるので、都合のよい図形で考える。非記述式だし。

左図のように、△DABが直角二等辺三角形のとき、AM=DM=CM=BMとなる。よって、

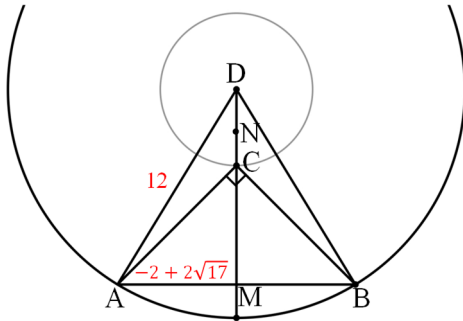
$$MN^2 = CM^2 - 4 = DM^2 - 4$$

となるから、

$$2MN^2 = CM^2 + DM^2 - 8$$

$$MN^2 = 68 \quad MN = 2\sqrt{17}$$

↑真ん中の灰色の円は半径4, 外側の円は半径12



(※) というのは嘘で、実は AB の長さが短すぎると、 $DC=4$ が満たされなくなる。

左図のように、 $\triangle CAB$ が直角二等辺三角形となるとき、点 C は線分 DM 上の点となる。このとき $AM=CM=x$ と置くと、

$$x^2 + (x+4)^2 = 144$$

これを解いて、 $x > 0$ より、 $x = -2 + 2\sqrt{17}$ (大体 6.25)

よって、AB が $-4 + 4\sqrt{17}$ (大体 12.5) より小さいと、 $CD=4$ を満たせなくなる。

ちなみにこの図でも、 $MN = 4 - 2 + 2\sqrt{17} - 2 = 2\sqrt{17}$ と求められる。

【コメント】

中線定理を知らなくても良いし証明しなくても良い、さらに【解法 2】のようなズルをしなくても良い解法誰かありましたら、教えてください。私の頭じゃ無理でした。

$CM^2 + DM^2$ の誘導が露骨すぎて、中線定理としか思えない……。 (2) までは面白い問題です、(3) はよく分かりません。中線定理は中学では発展内容にも載っていなかった気がする……。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>