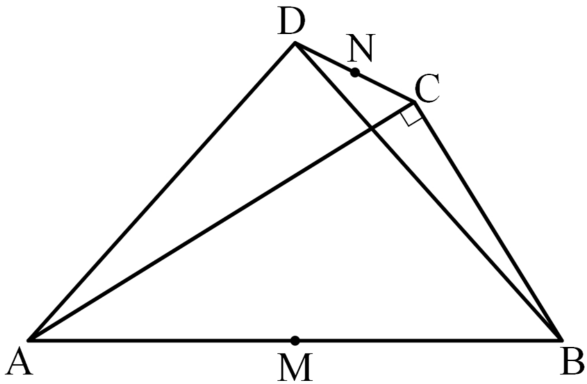
<table>
<tr><td colspan="3">よく分かんない問題（中線定理）</td></tr>
<tr><td>範囲：中 3 平面図形？</td><td>難易度：？？？？？</td><td>得点　　　　　/16</td></tr>
</table>

出典：平成 23 年度　日本大学第二高校

下の図のように, 底辺 AB が共通な直角三角形 ABC と二等辺三角形 ABD がある。∠C＝90°，AD＝BD＝12，CD＝4 とする。AB の中点を M，CD の中点を N とするとき，次の各問いに答えよ。



（1）AB＝16 のとき，二等辺三角形 ABD の面積を求めよ。

（2）$CM^2 + DM^2$ の値を求めよ。

（3）MN の長さを求めよ。

【解答例】

（1）（5 点）

直角三角形 ADM において，AM＝8 だから，$DM=\sqrt{144-64}=4\sqrt{5}$

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times 16\times 4\sqrt{5}=\mathbf{32\sqrt{5}}$

（2）（5 点）

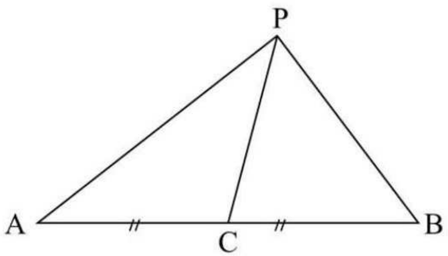
3 点 A，B，C を通る円を考えると，∠ACB＝90°より，AB は直径となる。

よって，AM＝BM＝CM

$DM^2=AD^2-AM^2=AD^2-CM^2$　すなわち，$CM^2+DM^2=AD^2=\mathbf{144}$

（3）（6 点）

【解法 1】中線定理



中線定理

$PA^2+PB^2=2(PC^2+CB^2)$

私立受けるなら，高校範囲の中線定理も知っているはず（？）なので，これを用いる。というかこれが正攻法としか思えない？

△MDC で，

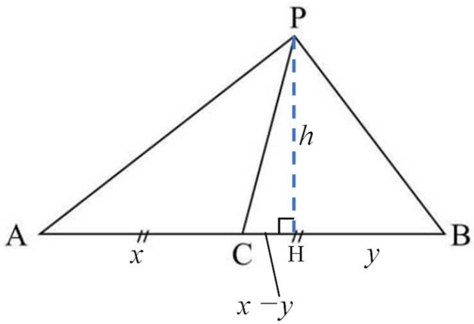
$MC^2+MD^2=2(MN^2+CN^2)$

$144=2(MN^2+4)$

$MN^2=68$　$MN=\mathbf{2\sqrt{17}}$

https://hokkaimath.jp/blog-entry-223.html　この広島の問題で，高校範囲での証明を載せたが，一応中学生でも分かる証明はできないこともない。

右の△PAB で, 点 C は AB の中点。点 P から辺 AB に垂線を下ろし交点を H とする。PH＝h, AC＝BC=x, BH＝y と置く。



$\mathrm{PC}^2 = h^2 + (x-y)^2$

$\mathrm{PA}^2 = (2x-y)^2 + h^2$

$\mathrm{PB}^2 = y^2 + h^2$　であるから,

$\mathrm{PC}^2 = h^2 + (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + h^2$

$\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2$

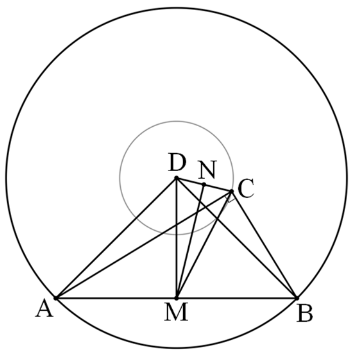
$$\begin{aligned}
&= 4x^2 - 4xy + y^2 + h^2 + y^2 + h^2 \\
&= 4x^2 - 4xy + 2y^2 + 2h^2 \\
&= 2\left(x^2 - 2xy + y^2 + h^2\right) + 2x^2 \\
&= 2\mathrm{PC}^2 + 2x^2 \\
&= 2(\mathrm{PC}^2 + \mathrm{CB}^2)
\end{aligned}$$

※あえて座標を使わないでみたが，高校 2 年で習う（？）

http://awayajuku.blog81.fc2.com/blog-entry-312.html

のように証明した方が中学生にも分かりやすい？

【解法 2】任意の AB



↑真ん中の灰色の円は半径 4，外側の円は半径 12

問題文から，AB の長さがどうであろうが MN の長さは一定（※）と判断できるので，**都合のよい図形で考える**。非記述式だし。

左図のように，△DAB が直角二等辺三角形のとき，AM＝DM＝CM＝BM となる。よって，$\mathrm{MN}^2 = \mathrm{CM}^2 - 4 = \mathrm{DM}^2 - 4$

となるから,

$2\mathrm{MN}^2 = \mathrm{CM}^2 + \mathrm{DM}^2 - 8$

$\mathrm{MN}^2 = 68 \quad \mathrm{MN} = \mathbf{2\sqrt{17}}$

【コメント】

中線定理を知らなくても良いし証明しなくても良い，さらに【解法 2】のようなズルをしなくても良い解法誰かありましたら，教えてください。私の頭じゃ無理でした。

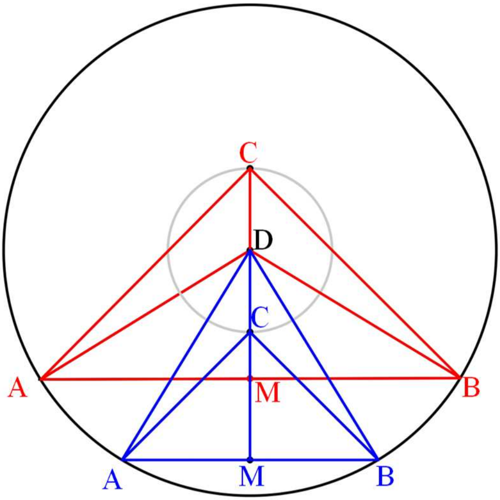
$\mathrm{CM}^2+\mathrm{DM}^2$の誘導が露骨すぎて，中線定理としか思えない……。（2）までは面白い問題です，（3）はよく分かりません。中線定理は中学では発展内容にも載っていなかった気がする……。

（※）AB の長さによっては，CD＝4 を満たさなくなる。
下図のように，点 D を中心とする半径 4, 12 の円を書くと，限界が分かる。

【厳密に解く場合】

（2）より，$\mathrm{CM}^2+\mathrm{DM}^2=144$

I）4 点 M，C，D，N が同一直線上にある場合



I-ア）AB が最小（△ACB は直角二等辺三角形，左図の青）

AM＝CM＝x と置くと，

$x^2+(x+4)^2=144$

これを解いて，$x>0$ より，

$x=-2+2\sqrt{17}$（大体 6.25）

$\mathrm{MN}=4-2+2\sqrt{17}-2=\mathbf{2\sqrt{17}}$

AB が $-4+4\sqrt{17}$（大体 12.5）より小さいと，CD＝4 を満たせなくなる。

I-イ）AB が最大（△ACB は直角二等辺三角形，左図の赤）

AM＝CM＝x と置くと，$x^2+(x-4)^2=144$　$x>0$ より，$x=2+2\sqrt{17}$

$\mathrm{MN}=2+2\sqrt{17}-2=\mathbf{2\sqrt{17}}$

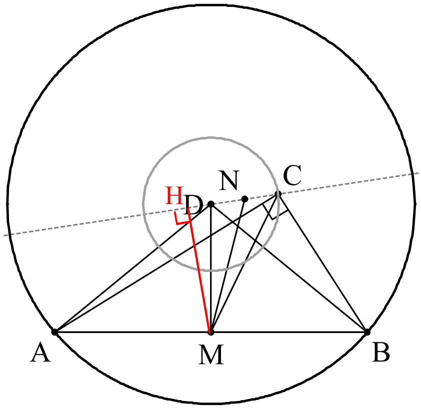
AB が $4+4\sqrt{17}$より大きいと，CD＝4 を満たせなくなる。

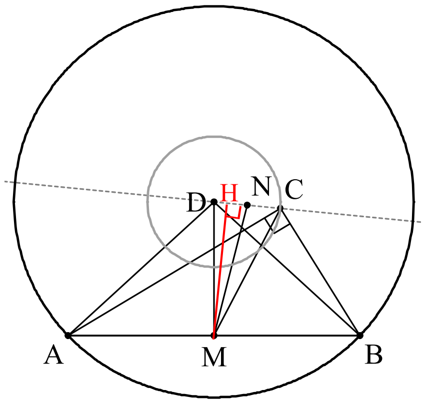
※これらの場合でも中線定理は成り立つ

II）4 点 M，C，D，N が同一直線上に無い場合

点 M から直線 CD に垂線を下ろし，交点を H とする。MN＝x，NH＝y と置く。△MHN において，$\mathrm{MH}^2 = x^2 - y^2$…①

II-ア）∠MND≦90° の場合



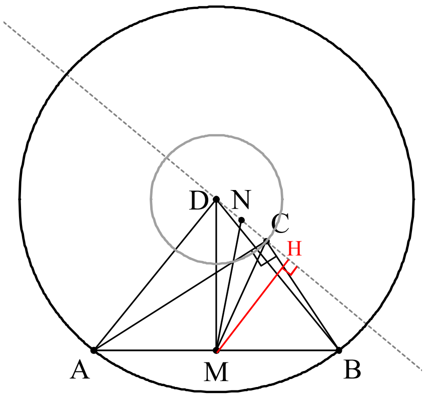


$\mathrm{CH} = y + 2$，$\mathrm{DH} = y - 2$ だから，

△MHD において，$\mathrm{MD}^2 = (y-2)^2 + \mathrm{MH}^2$

△MHC において，$\mathrm{MC}^2 = (y+2)^2 + \mathrm{MH}^2$

足して，$144 = 2y^2 + 8 + 2\mathrm{MH}^2$，①を代入し，$136 = x^2$　$x = \mathbf{2\sqrt{17}}$



II-イ）∠MND≧90° の場合

$\mathrm{CH} = 2 - y$，$\mathrm{DH} = 2 + y$

△MHD において，

$\mathrm{MD}^2 = (2+y)^2 + \mathrm{MH}^2$

△MHC において，

$\mathrm{MC}^2 = (2-y)^2 + \mathrm{MH}^2$

II-ア）と同様に，結局$x = \mathbf{2\sqrt{17}}$