入試鍛錬　　　　　　　　得点　　　　/60

TITLE：4STEP　390～395 あたり

第1回：微分とは

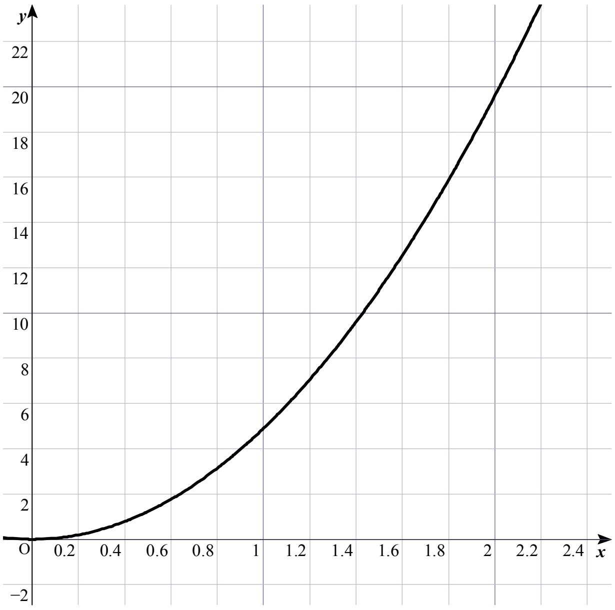
理想的環境下で，物体を自由落下させると，x 秒後に物体が進んでいる距離 y は重力加速度を g として，

$$y=\frac{1}{2}gx^2 \tag{1}$$

という式がある。g＝大体 9.8 ですから，

$$y=4.9x^2 \tag{2}$$

と書き換えられる。グラフに書くと，次のようになる。



ここで，「瞬間の速さ」を求めたい。「平均の速さ」なら，例えば，次のような問題があった。

＜例題＞1 秒から 2 秒の間の平均の速さを求めなさい。

＜解答＞

1 秒から 2 秒の間に進んだ距離（y の増加量）は，

yの増加量 $=19.6-4.9=14.4$

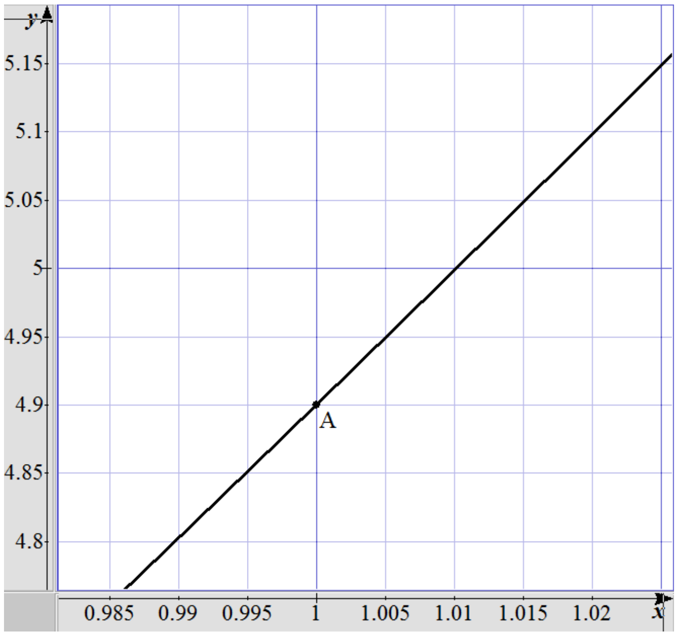
x の増加量は 1 だから，14.4÷1＝**14.4(m/s)**となる。

「瞬間の速さ」とは，1 秒，1.00001 秒，1.00002 秒……の瞬間瞬間の速さである。（中 3 理科で，車のメーターに表示されるものと習ったはず。）

それを求めることができるのが「**微分**」である！

＜例題＞1 秒での瞬間の速さを求めなさい。

「速さ」なので，（y の増加量(m)）/（x の増加量(s)）で求められそうだなというのは何となく分かる。そこで，グラフの 1 秒付近を超拡大してみる。



1 秒付近を超拡大すると，曲線なはずなのに，何か直線に見える。（本当にただ拡大しただけである。）

「瞬間の速さ」なのだから，1 秒からほんの少しだけ時間をずらした秒数，例えば 1.005 秒との間の平均の速さを求めれば，瞬間の速さに近づきそうである。

実際にいろいろやってみた。（計算過程は省略。）

（1）1 秒と 1.1 秒　平均の速さは，10.339 m/s

（2）1 秒と 1.05 秒　平均の速さは，10.045 m/s

（3）1 秒と 1.01 秒　平均の速さは，9.849 m/s

（4）1 秒と 1.005 秒　平均の速さは，9.8245 m/s

ご覧のとおり，だんだん瞬間の速さに近づいている（気がする）。1 秒と 1.005 秒なら，瞬間の速さが図のエセ直線の傾きとほぼ一致していることも分かるだろう。

ただし，いくらほんの少しずらすと言っても，算数の世界じゃ限界がある。そこでようやく登場するのが**微分**である。

＜微分の方法＞

1 秒と，**ほんの少しずらした 1+h 秒**の平均の速さをまずあらわす。

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{4.9(1+h)^2-4.9}{1+h-1}=\frac{4.9(1+h)^2-4.9}{h}$$

ここで，瞬間の速さを求めるのだから，**h が限りなく 0 に近づけば良いな**と考える。それを記号でこう表す。

$$\lim_{h \to 0} \frac{4.9(1+h)^2 - 4.9}{h}$$

lim という記号（意味はリミット）を用いて，限りなく 0 に近づけますよ（高校数学では 0 を代入すると理解してもよいかも）と命令している。

しかしここで困ったことがある。そのまま h を 0 にすると，

$$\lim_{h \to 0} \frac{4.9(1+h)^2 - 4.9}{h} = \frac{0}{0} \ ??$$

と訳の分からないことになる。詳しくは数 III でやるが，

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ **の形を不定形という。**

ものすごく馬鹿な言い方すると「もうお手上げ」の状態を不定形という。いやこんな言い方まずいか。

まあいいや。でもそこで降参するのは嫌なので，考えた。そう，

$$\frac{4.9(1+h)^2 - 4.9}{h}$$

をうまく変形してあげればよいのでは？

明らかにまだ計算できるので，計算する。

$$\frac{4.9(1+h)^2 - 4.9}{h} = \frac{(4.9 + 9.8h + 4.9h^2) - 4.9}{h}$$

$$= \frac{9.8h + 4.9h^2}{h} = 9.8 + 4.9h$$

この状態で，lim の命令を行う。

$$\lim_{h \to 0}(9.8 + 4.9h) = 9.8$$

不定形が解消され，無事 1 秒での瞬間の速さが **9.8 m/s** と求まった。

これは物理基礎ですでに学習済みの，

$$y = 4.9x^2,\ \boldsymbol{v = 9.8x}$$

の公式と一致している！（x＝1 を代入すると，瞬間の速さ v=9.8 となる！）

では，1 秒だけでは物足りないので，一般化して微分してみよう。

＜例題＞x 秒での瞬間の速さを求めなさい。

＜解答＞

【解答】9.8x

別にこの関数だけでなく，一般の関数で，微分を定義できる。

関数 $f(x)$で，x における瞬間の速さは，次の微分操作によって求められる。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$f'(x)$は瞬間の速さだが，数学の世界では**導関数**と呼ぶ。（要は微分したら出てくる関数のこと！）

【例題】【出典：2015 年度　センター試験数 IIB】

関数$f(x)=\frac{1}{2}x^2$の $x=a$ における微分係数$f'(a)$を求めよう。h が 0 でないとき，x が a から $a+h$ まで変化するときの$f(x)$の平均変化率は，

$\boxed{ア}+\dfrac{h}{\boxed{イ}}$ である。

したがって，求める微分係数は，

$$f'(a)=\lim_{h\to\boxed{ウ}}\left(\boxed{ア}+\frac{h}{\boxed{イ}}\right)=\boxed{エ}$$

である。

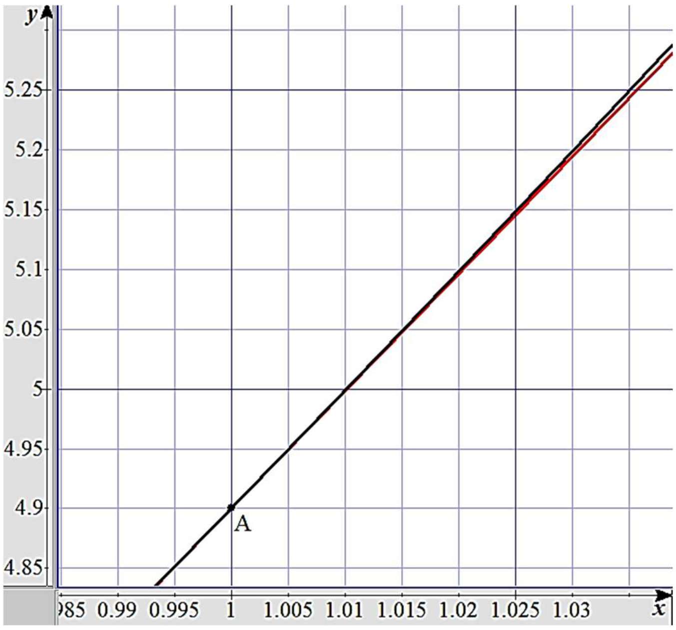
※平均変化率→平均の速さと思ってよい。

【解答】 ア a　イ 2　ウ 0　エ a

ただし，数学の世界では，瞬間の速さを求めるために微分しているのではない。瞬間の速さが先なのか，これが先なのか知らないが，微分すると，その点での**接線の傾き**を求めることができる。

さっきの自由落下の式だと，1 秒で $y=4.9$，接線の傾き $y'=9.8$ となる。式は，$y=9.8(x-1)+4.9$これを図示（赤い直線）すると，

上図のようになる。これに関しても超拡大してみると，



しっかり接しているし，ほぼエセ直線との傾きと一致していることも分かる。

（先生によっては微分を超拡大なんて言うが，これがその理由）

※4STEP の接線求める練習問題は，次のプリントをご覧になってから行ってちょんまげ。