コラッツ予想		
範囲：整数問題	難易度：★×7	得点　　　　/25

出典：2020年度　都立西高校

Mさんが，自由研究で自然数の性質について図書館で調べたところ，本の中に，次のような**操作**で，自然数がどのように変わっていくかが書かれていた。

本の内容

操作

ある自然数 a が

① 偶数なら a を2で割る。

② 奇数なら a を3倍して1を加える。

自然数 a に**操作**を行い，得られた数を b とし，b に対して**操作**を行って c を得ることを自然数 a に2回の**操作**を行うとし，3回，4回，5回，…の**操作**は同様とする。

例えば，7に3回の操作を行うと7→22→11→34となる。

自然数 a が10000以下のとき，自然数 a に操作を繰り返し行うと必ず1になることは分かっている。

Mさんは自然数 a が初めて1になるまでの**操作**の回数に興味を持った。そこで，自然数 a に**操作**を繰り返し行い，初めて1になるまでの**操作**の回数を $N(a)$ とし，$N(1)=0$ とした。例えば，10に**操作**を繰り返し行うと，6回の**操作**で初めて1になるので，$N(10)=6$ である。次の各問に答えよ。

〔問1〕$N(6)$ を求めよ。

〔問2〕$N(168)-N(8\times d)=3$ を満たす自然数 d を求めよ。ただし，答えだけでなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

M さんは，**操作**の回数だけでなく，1 になるまでの自然数の変化にも着目してみた。下の表は 2020 に**操作**を繰り返し行い，2020 が 1 になるまでに現れたすべての自然数を 2020 も含めて左から小さい順に並べたとき，最初から x 番目の自然数を y として，x と y の関係を表したものである。ただし，e，f，g にはそれぞれある自然数があてはまり，表の中の…の部分は自然数が省略されている。

x	1	2	3	4	…	$e-2$	$e-1$	e	$e+1$	…	N（2020）	N（2020）＋1
y	1	2	4	5	…	172	f	g	344	…	2020	2752

表の y の値の中央値は 233.5 で，f は 2020 から 37 回**操作**を行ったときに現れる自然数で，2020 から 38 回**操作**を行ったときに現れる自然数は 98 であり，

N（2020）＝53＋N（160）が成り立つ。

〔問 3〕このとき自然数の組（e，g）を求めよ。

【解答例】

問 1（7 点）

１，$6\div2=3$

２，$3\times3+1=10$

３，$10\div2=5$

４，$5\times3+1=16$

５，$16\div2=8$

６，$8\div2=4$

７，$4\div2=2$

８，$2\div2=1$　**8 回**

上記の５～８からも分かる通り，2^n は操作①を n 回するから，$N(2^n)=n$ である。

問 2（10 点）

2^n は操作①を n 回するから，$N(2^n)=n$ である。
$N(168)$ を求める。$168=2^3\times21$ なので，
$N(168)=N(21)+3$
$21\times3+1=64=2^6$ より，$N(21)=1+6=7$
よって $N(168)=10$ なので，$N(8\times d)=7$ となる。
$8\times d=2^3\times d$ なので，$N(8\times d)=3+N(d)=7$ だから，$N(d)=4$
ここで，自然数 1 から逆の操作を 4 回して考えられるのは，
$1\leftarrow2\leftarrow4\leftarrow8\leftarrow16$，または，$1\leftarrow2\leftarrow4\leftarrow1\leftarrow2$，となり，今回は初めて 1 になるまでの操作の回数を $N(a)$ としているので，$d=2^4=$**16**

※今回はたまたま d が 1 つに絞れたが，例えば $N(d)=8$ だったら問 1 からも分かる通り 1 つに絞れない。「d は 1 つである」の記述は必須！

問 3（8 点）

<u>大人しく条件を数式にしていったら結構簡単に解ける</u>

1，f は 2020 から 37 回操作を行ったときに現れる自然数で，2020 から 38 回**操作**を行ったときに現れる自然数は 98

98－1＝97，97 は 3 の倍数ではないので，38 回目の操作では②を行っていない，①を行っているので，f÷2＝98，f＝196

2，表の y の値の中央値は 233.5　※表の値は小さい順に並んでいる！

$e-2$	$e-1$	e	$e+1$
172	196	g	344

y は自然数しかないのに，中央値は 233.5 である。また，196≦233.5≦344 なので，考えられるのは，

I) $\dfrac{196+g}{2}=233.5$，$g=271$，$196 \leq g \leq 344$ を満たす。

II) $\dfrac{g+344}{2}=233.5$，$g=123$，こちらは不適

3，あとは e が分かればよいが，わざとらしく N（2020）＝53＋N（160）が成り立つと書かれてある。e－1 番目と e 番目の数を 2 で割ったものが中央値となるので，N（2020）が分かれば e も分かる。

N（2020）＝53＋N（160），160＝2^5×5，

5×3＋1＝16 なので，N（5）＝5 であるから，

N（2020）＝53＋5＋5＝63

最も大きい数は N（2020）＋1＝64 番目なので，

e－1＝32，e＝33　**（e, g）＝（33, 271）**

【コメント】

コラッツ予想の問題です。2011 年のセンター試験でもコンピューターの問題として出題されていましたね。意外にコラッツを知らない中学生の方が大人しく解けたかもしれません。ちなみに「a が 10000 以下」とありますが，今は 2^{68} ぐらいまでは反例が見つかっていないらしいです。