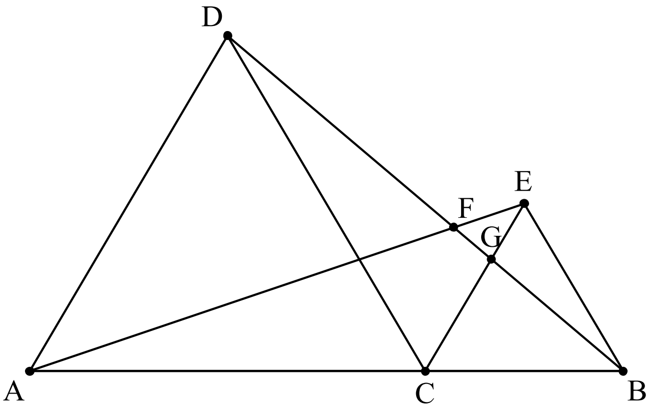
正三角形と円周角	
範囲：中3図形	難易度：★★★★☆

得点　　　/14

図1のように，線分AB上に点Cをとり，AC，CBを，それぞれ1辺とする正三角形△ACDと△CBEをABの同じ側につくる。また，AEとBDの交点をF，CEとBDとの交点をGとする。

次の各問いに答えなさい。

図1



（1）∠DCEの大きさを求めなさい。

（2）△ACE≡△DCBを証明しなさい。

（3）∠BFE＝60°であることを，次のように求めた。

> （2）より，△ACE≡△DCBから，
> 　∠AEC＝∠DBC
> だから，円周角の定理の逆より，4点B，E，$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$は，同じ円周上にある。
> よって，$\overset{\frown}{\mathrm{BE}}$に対する円周角は等しいから，
> 　∠BFE＝$\boxed{\text{う}}$
> したがって，∠BFE＝60°

①　$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$に当てはまる点を，それぞれ記号を用いて書きなさい。ただし，$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$の順序は問わない。

②　$\boxed{\text{う}}$に当てはまる最も適切な角を，記号を用いて書きなさい。

（4）AC＝12 cm，CB＝6 cmとする。

①　次のように，相似な2つの三角形を見つけることにより，その相似比から，CG：GEを求めることができる。

　$\boxed{\text{え}}$に当てはまる最も適切な三角形を記号を用いて書き，$\boxed{\text{お}}$に当てはまる最も簡単な整数の比を求めなさい。

> △DCG∽$\boxed{\text{え}}$だから，CG：GE＝$\boxed{\text{お}}$である。

②　BGの長さを求めなさい。

③　△EFGの面積を求めなさい。

正三角形と円周角　解答例	
範囲：中 3 図形	難易度：★★★★☆

（1）（1 点）

∠DCE＝60°

（2）（4 点）

△ACE と△DCB において，
△ACD と△BCE は正三角形であるから，（※）
AC＝DC，CE＝CB…①
∠ACE＝∠ACD＋∠DCE＝120°
∠BCD＝∠BCE＋∠DCE＝120°
であるから，∠ACE＝∠BCD…②
①，②より 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから，△ACE≡△DCB

（※）長野県では①を，「仮定より」と書いたら減点です。でも，正三角形の定義が「すべての辺が等しい」なので，仮定よりでも問題ないはずですけどね。角度の方②は定理なので 1 言書きましょう。

（3）①（完 1 点）

C と F

（3）②（1 点）

∠BCG

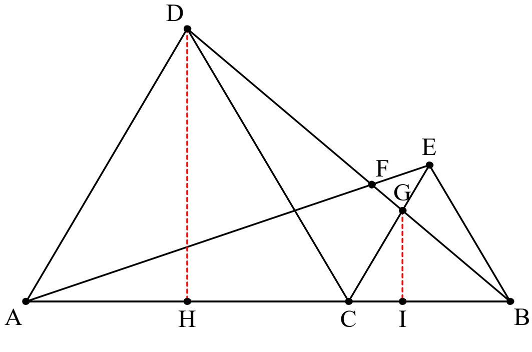
（4）①（完 2 点）

△DCG∽**△BEG** だから，CG：EG＝**2：1**

（※）DC//EBDC＝12 cm，BE＝6 cm を利用。

（4）②（3 点）

△DCG∽△BEG であるから，
DC：BE＝DG：BG＝2：1
D から AC に垂線を下ろし，AC との交点を H とする
DH＝$6\sqrt{3}$ cm
H は AC の中点だから，BH＝6＋6＝12 cm
△BDH で三平方の定理より，
$BD^2＝DH^2＋BH^2＝108＋144＝252$
$BD>0$より，BD＝$6\sqrt{7}$cm
よって，BG＝BD÷3＝**$2\sqrt{7}$ cm**



（4）③（3 点）

同様に CG：EG＝2：1 なので，CG＝4 cm。
G から BC に垂線を下ろし，交点を I とする。
∠GCI＝60°なので，GC:GI＝2：$\sqrt{3}$
よって，GI＝$2\sqrt{3}$ cm
故に，△BCG＝$\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ cm^2となる。
∠EFG＝∠BCG，∠EGF＝∠BGC より，△EFG∽△BCG なので，EG:BG＝2:$2\sqrt{7}$＝1:$\sqrt{7}$だから，面積比は，1：7 なので，

△EFG＝$\mathbf{\frac{6\sqrt{3}}{7}}$ **cm^2**

【コメント】

60° と補助線の典型的応用問題です。

応用問題ですが，非常に誘導が丁寧な問題です。数学が得意な受験生は，最後まで解くとよいでしょう。

長野県の模範解答を見たら，正三角形の辺の長さ，円の半径まで「仮定より」とは書いてはいけないようです。長けりゃいいってものでもありませんが，証明は文句言われないようにクドく書いておきましょう。（ちなみに北海道は仮定よりで問題ないと思われます）