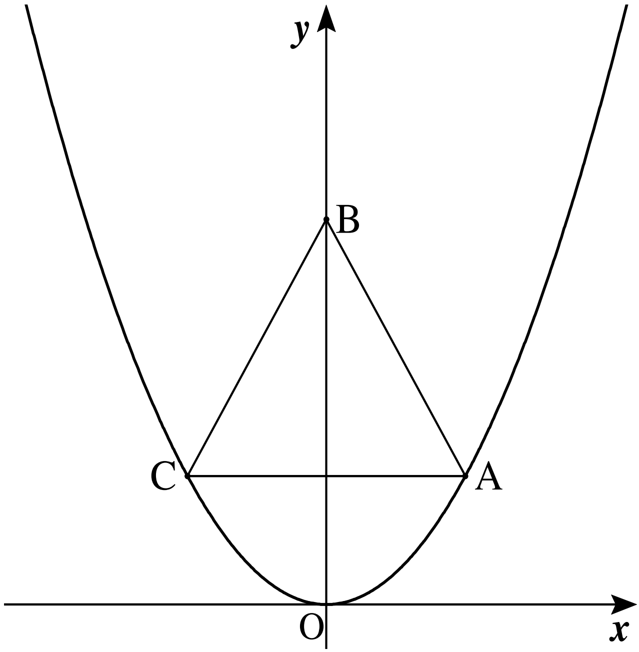
関数と正三角形

範囲：関数，三平方	難易度：★×5	得点　　　　　/16

出典：オリジナル？

y座標が同じである点 A，C を通る$y = ax^2$ のグラフがあります。y 軸上に，B（0, 9）を取ると，△ABC は正三角形となります。点 B の y 座標は，点 A の y 座標より大きいとし，点 A の x 座標は正とします。次の問いに答えなさい。



問 1　直線 AB の式を求めなさい。

問 2　線分 AC の中点を D，点 A から x 軸に垂線を下ろし，x 軸との交点を E とします。四角形 OEAD と△ABC の面積比が 1：2 になるとき，

（1）a の値を求めなさい。

（2）$y = ax^2$上に，点 F を取ります。直線 CF が，△ABC の面積を二等分するとき，点 F の座標を求めなさい。

【解答例】

問 1（4 点）

直線 AB の式は，∠BAC＝60°なので，傾きは，$-\sqrt{3}$となる（BD÷AD を計算すると分かる）。よって，切片は 9 だから，AB：$\boldsymbol{y=-\sqrt{3}x+9}$

問 2（5 点）

長方形 OEAD の面積は OD×DA，△ABC の面積は BD×DA（DA＝1/2CA）

よって，OD : BD＝1 : 2 となるから，A の y 座標は 3 となる。したがって，

直線 AB の式に代入して，$3=-\sqrt{3}x+9$　$\sqrt{3}x=6$　$x=2\sqrt{3}$

$y=ax^2$ に代入して，$3=12a$　$\boldsymbol{a=\frac{1}{4}}$

問 3（7 点）

直線 CF は線分 AB の中点を通る。中点の座標は，$\left(\sqrt{3},6\right)$

$C\left(-2\sqrt{3},3\right)$なので，この 2 点を通る直線の式は，$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+5$

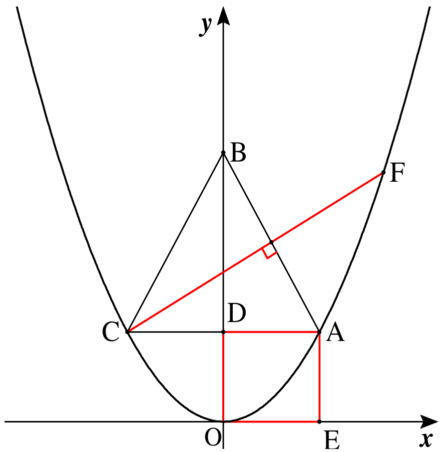
この式と，曲線の式を連立して，

$\frac{1}{\sqrt{3}}x+5=\frac{1}{4}x^2$

$x^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}x-20=0$　$x>0$ なので

$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{\frac{4}{3}+20}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$　(※1~2)



$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+5$ に，$x=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ を代入して，$y=\frac{25}{3}$　$\mathbf{F}\left(\boldsymbol{\frac{10\sqrt{3}}{3},\frac{25}{3}}\right)$

（※1）解法その 1　解の公式簡略版

$$ax^2+2bx+c=0$$

と，x の係数が 2 の倍数の時，この二次方程式の解は，

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}}$$

割と楽になる。某高校では「中学で習ったよね？」と当たり前に出されました。習ってないわ！

（※2）解法その 2　もう一つの解が分かっている

曲線と，直線 CF の交点は，点 C と点 F である。よって，二次方程式を因数分解したとき，

$$\boldsymbol{\left(x+2\sqrt{3}\right)(x-F)=x^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}x-20}$$

となるに決まっている。

$$F=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

【コメント】

大昔に作っていたプリントです。北海道の中学生には難しすぎるので没にしていました。しかし，2013 年度など，北海道においても，関数で 30°，60° を上手く使わないと解けない問題出題されていますね。

問 3 の解法，時間短縮になるので，今から覚えておいて損は無いです。まあ今は無理でも，高校在学中には覚えましょう。