性格悪い相似・円周角		
範囲：相似・円周角	難易度：★★★★★+	得点　　　　/11

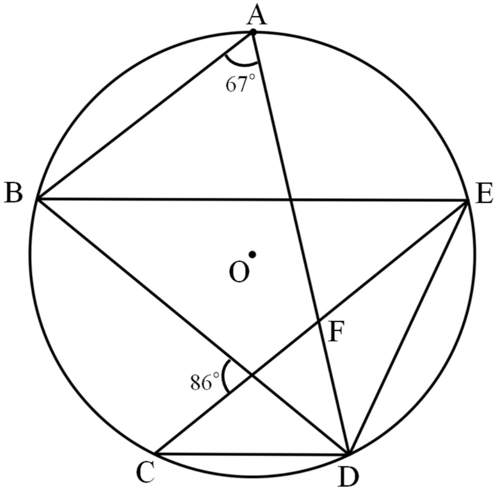
出典：2022 年度　神奈川県

（ウ）

次の□の中の「あ」「い」にあてはまる数字をそれぞれ 0～9 の中から 1 つずつ選び，その数字を答えなさい。

右の図において，5 点 A, B, C, D, E は円 O の周上の点で，BE//CD であり，線分 AD は∠BDE の二等分線である。また，点 F は線分 AD と線分 CE との交点である。

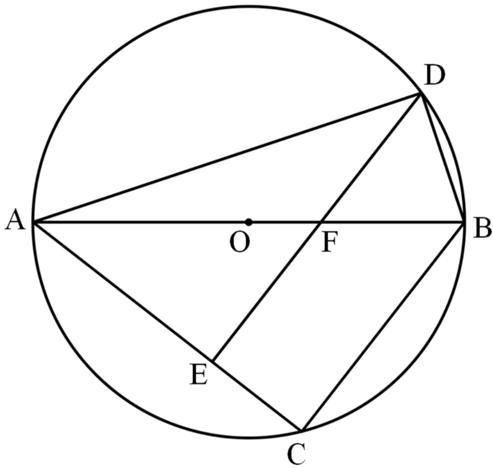
このとき，∠AFE＝$\boxed{\text{あい}}$° である。



（エ）

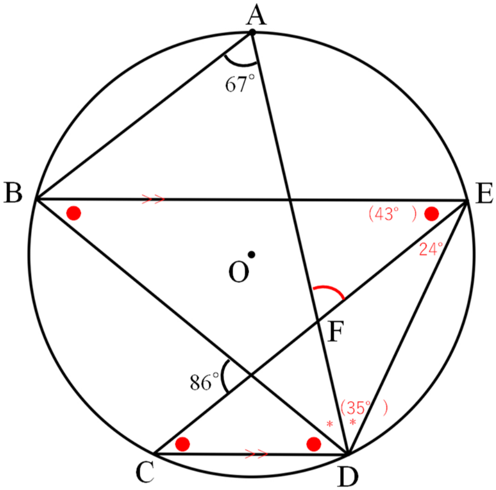
次の□の中の「う」「え」「お」「か」にあてはまる数字をそれぞれ 0～9 の中から 1 つずつ選び, その数字を答えなさい。

右の図において，線分 AB は円 O の直径であり，２点 C，D は円 O の周上の点である。また，点 E は線分 AC 上の点で，BC//DE であり，点 F は線分 AB と線分 DE との交点である。AE＝2 cm，CE＝1 cm，DE＝3 cm のとき，三角形 BDF の面積は $\dfrac{\boxed{\text{うえ}}}{\boxed{\text{おか}}}$ cm^2 である。



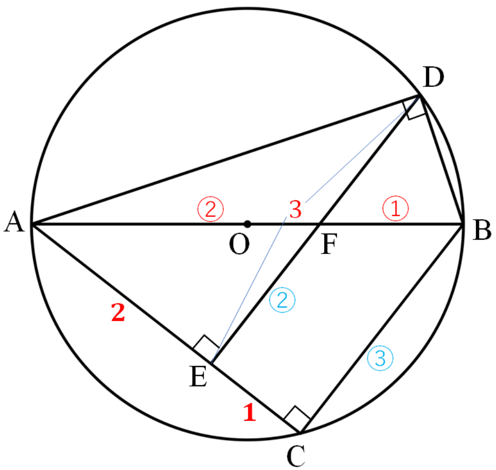
【解答例】

（ウ）（**5** 点）

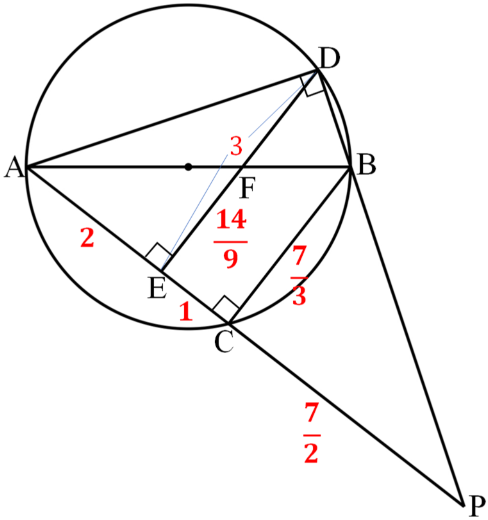


∠DBE＝●とする。
BE//CD とかほざいているので，これに注目すると，これと円周角の定理から， 左図のように，●で表される角度が 4 つ出現する。三角形の外角はそれと隣り合わない二つの内角の和に等しいので，2●＝86° ，●＝43°
$\overset{\frown}{BD}$ に対する円周角なので，
∠BAD＝∠BED＝67°
よって，∠CED＝67－43＝24°
△BDE で，∠BDE＝180° －43° －67° ＝70°
DA は∠BDE の二等分線なので，∠ADE＝35° ，∠AFE＝35° ＋24° ＝**59°**

（エ）（**6** 点）



この問題中盤に出てくるくせに，補助線引かないと解けない問題である。性格が悪い。
とりあえずすぐに分かることを左図のように書き込む。なんとか DE＝3 cm，EF : CB＝2 : 3 を活かせないか考えて，補助線を引く。直角がたくさんあるので，それ系の補助線引けば何とかなりそう。



直線 AC と直線 DB との交点を P とする。すると，△PED∽△DEA となるから，

PE：3 = 3:2　$PE = \frac{9}{2}$

$PC = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$

同様に△PCB∽△DEA だから

$\frac{7}{2}$：BC = 3：2　$BC = \frac{7}{3}$

よって，$EF = \frac{7}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{9}$

$DF = 3 - \frac{14}{9} = \frac{13}{9}$，△BDF は DF を底辺としたとき，高さが EC と同じ 1 cm となるので，△$BDF = \frac{1}{2} \times \frac{13}{9} \times 1 =$ **$\frac{13}{18}$ cm^2**

【コメント】

これが RPG だったら途中で投げてクソゲー認定します。中盤に難しい問題出さないでほしいですよね。しかも大問 3，（ア）はよくある問題でしたが，（イ）がかなりのクソゲー，その上この（エ）です，中学生ドンマイ。

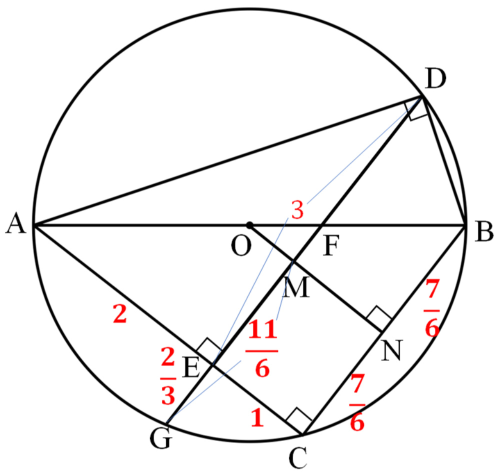
（エ）無駄に配点高いしね，異様に数学が得意な子はラッキーでしょうが，それ以外の普通の中学生はほとんど撃沈でしょうね。テストプレイしたのか！？

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/

【追記】メールフォームで貰った（エ）の別解２つ

色々な解法を見て，引き出しを増やし，本番に備えると良いかもしれません。

（解法 1）



直線 DE を延長し，円周との交点を G とする。△ADE∽△GCE より，DE：AE＝CE：GE

$GE = \frac{2}{3}$

点 O から BC に垂線を下ろし，DG との交点を M，BC との交点を N とする。すると，M は DG の中点，N は BC の中点となる。（点 O が円の中心だから）

すると，$DG = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ なので，$MG = \frac{11}{6}$，$ME = \frac{11}{6} - \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ となり，

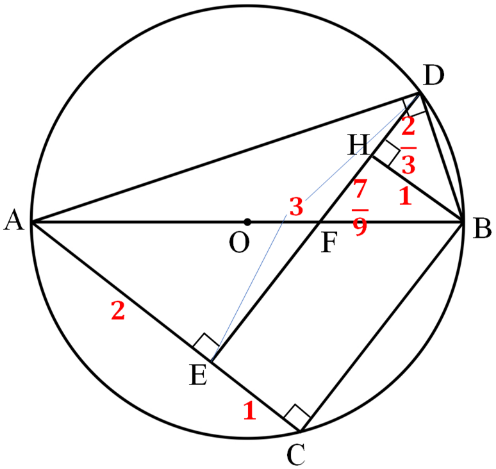
$NC = BN = ME = \frac{7}{6}$ だから，$BC = 2 \times \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$

FE：BC＝2：3 なので，$FE = \frac{14}{9}$，$DF = 3 - \frac{14}{9} = \frac{13}{9}$ となる。

△BDF は DF を底辺としたとき，高さが EC と同じ 1 cm となるので，

△BDF $= \frac{1}{2} \times \frac{13}{9} \times 1 =$ **$\frac{13}{18}$ cm^2**

（解法 2）



点 B から DE に垂線を下ろし交点を H とする。BH＝CE＝1

△ADE∽△DBH より，

AE：DE＝DH：BH

$DH=\frac{2}{3}$， $HE=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$

△AEF∽△BHF だから，

EF：HF＝2：1 なので，

$HF=\frac{7}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

$DF=\frac{7}{9}+\frac{2}{3}=\frac{13}{9}$

$\triangle BDF=\frac{1}{2}\times\frac{13}{9}\times 1=$ **$\frac{13}{18}$ cm²**

たぶん他にもいろいろあるので，考えるなりググるなりしてみてください。