感心する重たい小問集合		
範囲：小問集合	難易度：★×6	得点　　　　　/20

出典：2024 年度　灘高校

次の$\boxed{\quad}$内に適する数を記入せよ。

(1) $\sqrt{15}+\sqrt{10}$ の整数部分を a，小数部分を b とおくと，$a=\boxed{\quad}$であり，$b^2-2\sqrt{15}b+14\sqrt{10}$ の値は$\boxed{\quad}$である。ただし，正の数 p に対して $n \leqq p < n+1$ をみたす整数 n を p の整数部分といい，$p-n$ を p の小数部分という。

(2) a を定数とする。x の 2 次方程式

$$3(x+a)^2=\left(2a^2-1\right)(x+a)+x^2-2ax-3a^2$$

が解を 1 つしかもたないような a の値をすべて求めると，$a=\boxed{\quad}$である。

(3) AC＝5，BC＝12，∠C＝90° である直角三角形 ABC において，辺 AB 上の点 D と辺 BC 上の点 E を通る直線を折り目としてこの三角形を折ったとき，頂点 A が辺 BC 上の点 F と重なり，AD＝BF となった。このとき，線分 BF の長さは$\boxed{\quad}$である。

(4) 右の図のように，9 つのマスに 1 から 9 までの数字が書かれているボードがある。異なる 5 つのマスに黒石を 1 個ずつ置く。縦，横，斜めの列のうち，いずれか少なくとも 1 列に 3 個の黒石が並ぶ並べ方は全部で$\boxed{\quad}$通りある。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

【解答例】

（1）（2 点＋3 点）

$$\sqrt{15}+\sqrt{10}=\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

$2.23<\sqrt{5}<2.5$，$3.14<\sqrt{3}+\sqrt{2}<3.2$ より，

$2.23\times3.14=7.002$，$2.5\times3.2=8$ だから，$7<\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)<8$ (※)

よって，$\boldsymbol{a=7}$，$b=\sqrt{15}+\sqrt{10}-7$

$$b^2-2\sqrt{15}b+14\sqrt{10}=b\left(b-2\sqrt{15}\right)+14\sqrt{10}$$

$$=\left(\sqrt{15}+\sqrt{10}-7\right)\left(-\sqrt{15}+\sqrt{10}-7\right)+14\sqrt{10}$$

$$=\left(\left(\sqrt{10}-7\right)+\sqrt{15}\right)\left(\left(\sqrt{10}-7\right)-\sqrt{15}\right)+14\sqrt{10}$$

$$=\left(\sqrt{10}-7\right)^2-15+14\sqrt{10}=49+10-15=\mathbf{44}$$

（※）7 より大きく 8 より小さいことが分かれば，何でも良い。

(2)（5 点）

xの 2 次方程式を解くと，

$3(x+a)^2 = \left(2a^2-1\right)(x+a) + x^2 - 2ax - 3a^2$

$3(x+a)^2 - \left(2a^2-1\right)(x+a) - (x-3a)(x+a) = 0$

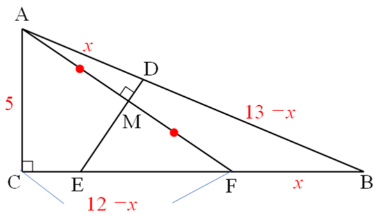
$(x+a)\left(3(x+a) - \left(2a^2-1\right) - (x-3a)\right) = 0$

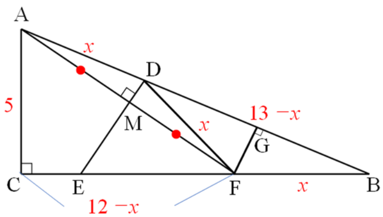
$(x+a)\left(2x-2a^2+6a+1\right) = 0$，$x = -a$ と $\dfrac{2a^2-6a-1}{2}$

解を 1 つしか持たないとき，$-a = \dfrac{2a^2-6a-1}{2}$

これを解いて，$\boldsymbol{a = \dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}}$

(3)（5 点）





まず何とか問題文を読み取って，左図を描く。直線 DE を折り目として折るので，AM＝FM，DE⊥AF である。

AB＝$\sqrt{12^2+5^2}$＝13

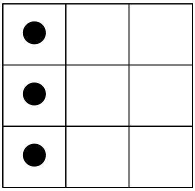
恐らくここまでなら誰でもすぐ思いつく。

「二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分する」ことを思い出すと，AD＝DF＝FB＝x となる。

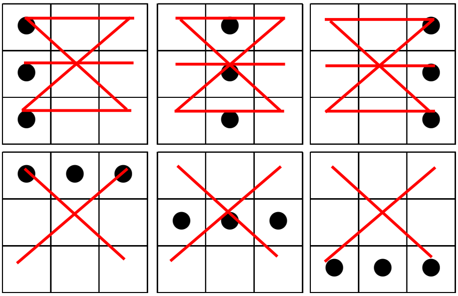
すると，△BFD は二等辺三角形となり，点 D から AB に垂線を下ろし交点を G とすると，△BFG∽△ABC となるので，$x:13 = \dfrac{13-x}{2}:12$，これを解いて，$x = \dfrac{169}{37}$，$\boldsymbol{\mathrm{BF} = \dfrac{169}{37}}$

（4）（5 点）

■解答例 1



黒石 1 列の並び方は，縦に並ぶのが 3 通り，横に並ぶのが 3 通り，斜めに並ぶのが 2 通り，合計 8 通り。各々に対して，残り 2 つの黒石の置き方はそれぞれ ${}_6C_2=15$ 通りあるので，$8\times15=120$ 通り。しかし，この 120 通りの中には，2 列並んでしまうことにより，重複もある。

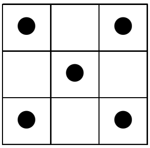


縦に揃っている場合，

重複するのは各々5 通り，$5\times3=15$ 通り

横に揃っている場合も同様に各々5 通り重複するが，そのうち 3 通りは縦に揃っている場合で数えたので，

$2\times3=6$ 通り



2 列斜めに並ぶので 1 通り重複する。

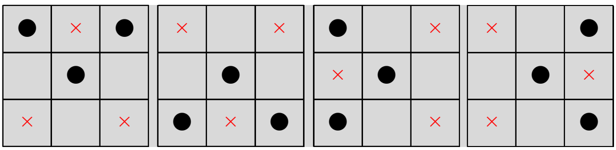
したがって，求める答えは，

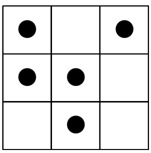
$120-(15+6+1)=$**98 通り**

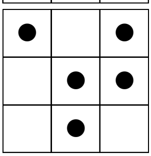
■解答例 2

黒石の置き方は全部で ${}_9C_5=126$ 通り。黒石が 1 列も並ばない置き方を考える。

①　②　③　④

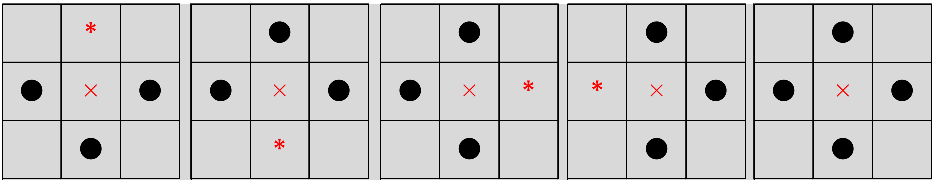






×は列がそろってしまう所
①で列が揃わないのは2通りあるので，
同様に②～④でも2通り，
合計8通り

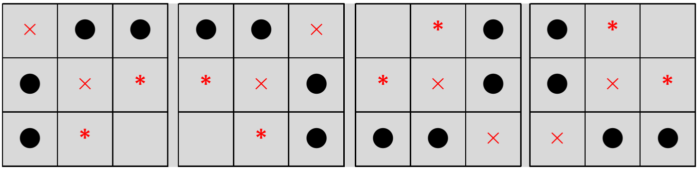
⑤　⑥　⑦　⑧　⑨



⑤～⑧，*に置くのは，考えやすくするために⑨で考える。

⑤～⑧で各 3 通り，⑨で 4 通り，合計 16 通り。

⑩　⑪　⑫　⑬



*に置くのは，⑤～⑨で考えている。⑩～⑬で各 1 通り，合計 4 通り。

したがって，求める答えは，$126-8-16-4=$ **98通り**

【コメント】

昨年までほど（1），（2）は難しくは無いですが，（3），（4）が随分と重いですね。小問集合とは思えません。

（1）は，$\sqrt{15}+\sqrt{10}$ という数が絶妙ですね。微妙に 7 より大きいです。問題集で何度も解いた問題を，少し捻ってきた感じですね，良い問題です。解き方分からない人はいないでしょうが，焦って計算ミスした人は多そうです。

（2）は灘にしては慈愛に満ちていますね，

（3）は，かなり良い問題です。中学校の勉強をしっかりしてきたかが問われています。まず普通の人は図を想像して描くのも大変でしょうね。どこが折り目だよと。無事描けても，AD＝DF＝FB＝x を思いつけた人，多くは無いでしょう，頭真っ白になりますから。普段の演習なら絶対に解けるのに。

（4）は，面倒くさいです。どう解こうか迷いました。もっと良い解法あります？誰か教えてください。コンビネーションは当たり前ですね。