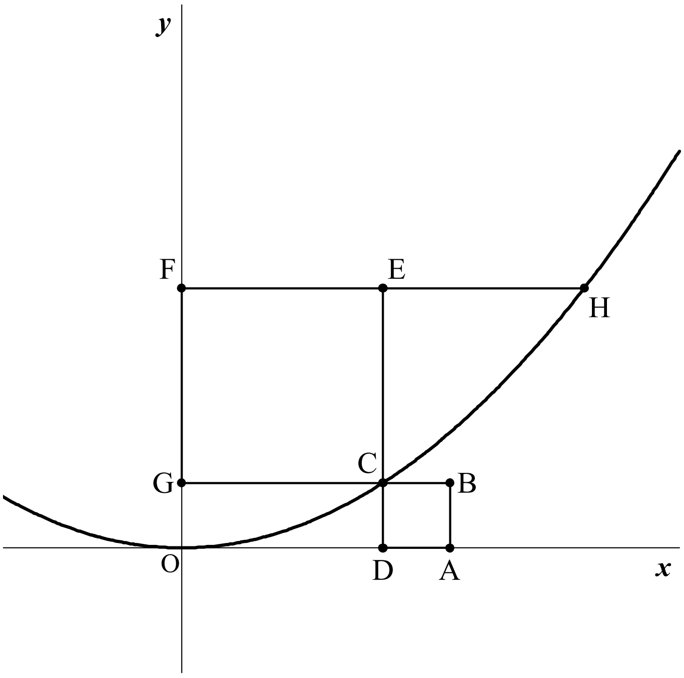
芸術的な高校入試第 16 回

出典：2015 年度　都立　日比谷高校	
難易度：★★★★★☆	美しさ：★★★☆☆☆
総試験時間：50 分	配点：25 点/100 点



曲線 f は $y = ax^2$ のグラフである。2 点 A，D は x 軸上にあり，点 A の x 座標は 6，点 D の x 座標は t（$0 < t < 6$）である。四角形 ABCD と四角形 CEFG はそれぞれ正方形で，辺 FG は y 軸上，点 C の y 座標は正の数で，点 E の y 座標は点 C の y 座標より大きい。曲線 f が点 C を通るとき，次の問いに答えなさい。

問 1　正方形 ABCD と正方形 CEFG の面積が等しいとき，a の値を求めなさい。

問 2　$a=1$ のとき，直線 BE の式を求めなさい。途中計算も書きなさい。

問 3　曲線 f 上にある点を H とし，点 F と点 H を結んでできる線分 FH の中点が点 E に一致したとき，点 H の座標を求めなさい。

【解答例】

問 1（7 点）

点 A の x 座標は 6 なので，各々の正方形の一辺の長さは，3 である。よって，C（3, 3）なので，

$3=9a$　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$

問 2（10 点）

$a=1$ のとき，$C(t,\ t^2)$

正方形 ABCD は正方形だから，AD＝6－t，CD＝t^2と表せるので，

$6-t=t^2$　$t^2+t-6=0$　$(t+3)(t-2)=0$

t＞0 だから，t＝2　C（2, 4）

よって，E（2, 6），B（6, 4）

この 2 点を通る直線は，

傾き $\frac{6-2}{4-6}=-\frac{1}{2}$，$(2,6)$を通るから切片 7

$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+7}$

問 3（8 点）

$E(t, at^2+t)$，$F(0, at^2+t)$と表せる。H の y 座標も，at^2+tである。

FH の中点が E なので, H の x 座標は $2t$ と表せるから，

$at^2+t=4at^2$

$3at^2-t=0$　$t(3at-1)=0$

$t>0$ より，$t=\frac{1}{3a}$

正方形 ABCD において，

$6-\frac{1}{3a}=a\left(\frac{1}{3a}\right)^2=\frac{1}{9a}$

$\frac{4}{9a}=6$　$54a=6$　$a=\frac{2}{27}$

$t=\frac{1}{3}\times\frac{27}{2}=\frac{9}{2}$

よって，H の x 座標は 2 倍して 9，y 座標は，

$81\times\frac{2}{27}=6$　$\mathbf{H(9,6)}$

【コメント】

いたって普通の難問ですが，正方形の扱いの良い練習となります。

問 2 までは誰でも解けてほしいかも。

【プリント制作】

芸術的な難問・良問数学

https://hokkaimath.blog.fc2.com/