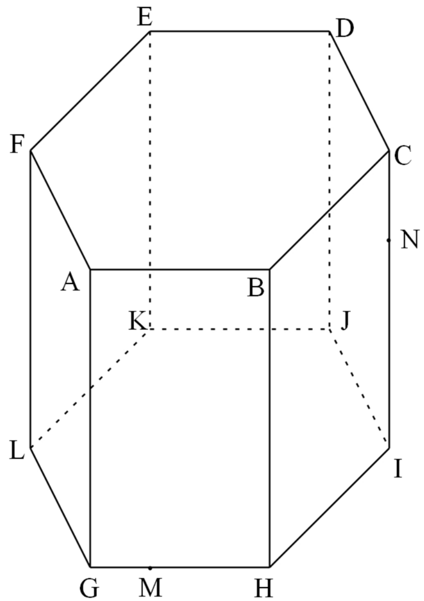
正六角柱と容赦ない計算		
範囲：中 3 空間図形	難易度：★★★★★++	得点　　　　　/20

出典：2018 年度　日比谷高校など

以下の図のように，AB＝6 cm，AG＝a cm の正六角柱 ABCDEF-GHIJKL があります。辺 GH 上に点 M，辺 CI 上に点 N を取ります。次の問いに答えなさい。



問 1　$a=4$ とします。三角錐 E-BGI の体積を求めなさい。

問 2　$a=9$，GM＝4 cm，CN＝x cm $\left(0<x<\dfrac{9}{2}\right)$，$\angle ENM=90^\circ$ とします。x の値を求め，△EMN の面積を求めなさい。

【解答例】

問 1（10 点）

$\triangle$BGI は，$BG = BI = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$，$GI = 6\sqrt{3}$の二等辺三角形。

B から GI に垂線を下ろすとその垂線の長さは，$\sqrt{52-27} = 5$ cm

よって，$\triangle BGI = \dfrac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 5 = 15\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

次に，△BGI を底面としたときの高さ EY を考える。

GI の中点を X とする。

（△GHI は，GH＝HI＝6，∠GHI＝120°の二等辺三角形なので,）HX＝3,

（中点連結定理より，HK＝12 なので,）KX＝9 となる。すると,

$EX = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$　$BX = \sqrt{9+16} = 5$ となる。

BY＝y と置くと，XY＝5－y

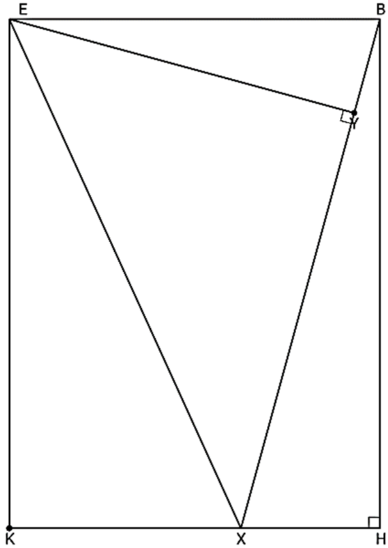
$EY^2 = 97 - (5-y)^2 = 144 - y^2$

これを解いて，$y = \dfrac{36}{5}$

$EY = \sqrt{144 - \dfrac{1296}{25}} = \sqrt{\dfrac{2304}{25}} = \dfrac{48}{5}$ cm

したがって，体積は,

$\dfrac{1}{3} \times 15\sqrt{3} \times \dfrac{48}{5} = \mathbf{48\sqrt{3}\ cm^3}$

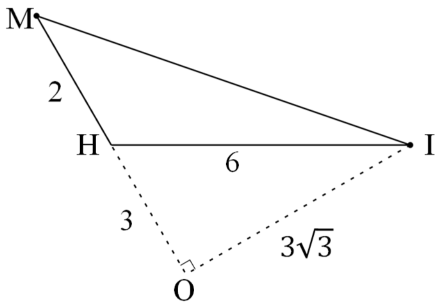


問 2（10 点）

△GMK で，GK＝$6\sqrt{3}$ cmだから，$KM^2 = 16 + 108 = 124$

△EKM で，$EM^2 = 124 + 81 = 205$

点 I から直線 MH に垂線を下ろし交点を O とする。∠IHM＝120°だから，IO＝$3\sqrt{3}$ cm，HO＝3 cm



$MI^2 = 25 + 27 = 52$

CN＝x だから，NI＝9－x

$EN^2 = 108 + x^2$

$MN^2 = 52 + (9 - x)^2$

$EM^2 = EN^2 + MN^2$ より，

$205 = 108 + x^2 + 52 + (9 - x)^2$

整理して，$x^2 - 9x + 18 = 0$　$(x - 6)(x - 3) = 0$

$0 < x < \frac{9}{2}$ より，$x = 3$

$EN = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$，$MN = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ となるから，

$\triangle EMN = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{14} \times 7\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 42 \times \sqrt{7} = \mathbf{21\sqrt{7}\ cm^2}$

【コメント】

問 1 はオリジナル，問 2 は日比谷の問題です。都立独自校という，その名の通り特殊な入試対応用です。

ただ，独自校は，解答が長くなるだけで，必要な知識 1 個 1 個は難しくありません。いかに長く思考できるかです。それが難しいのだけどね。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/