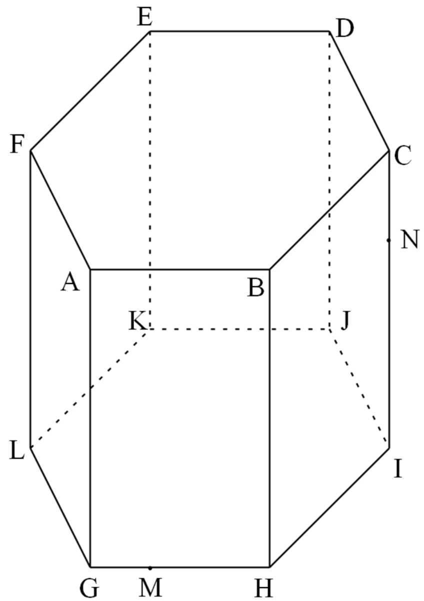
正六角柱と容赦ない計算		
範囲：中 3 空間図形	難易度：★★★★★++	得点　　　　　/20

出典：2018 年度　日比谷高校など

以下の図のように，AB＝6 cm，AG＝a cm の正六角柱 ABCDEF-GHIJKL があります。辺 GH 上に点 M，辺 CI 上に点 N を取ります。次の問いに答えなさい。



問 1　$a=4$ とします。三角錐 E-BGI の体積を求めなさい。

問 2　$a=9$，GM＝4 cm，CN＝x cm $\left(0<x<\frac{9}{2}\right)$，∠ENM＝90° とします。$x$ の値を求め，△EMN の面積を求めなさい。

【解答例】

問 1（10 点）

$\triangle$BGI は，$\mathrm{BG}=\mathrm{BI}=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}$，$\mathrm{GI}=6\sqrt{3}$の二等辺三角形。

B から GI に垂線を下ろすとその垂線の長さは，$\sqrt{52-27}=5\ \mathrm{cm}$

よって，$\triangle\ \mathrm{BGI}=\dfrac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 5=15\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$

次に，$\triangle$BGI を底面としたときの高さ EY を考える。

GI の中点を X とする。

（$\triangle$GHI は，GH＝HI＝6，∠GHI＝120°の二等辺三角形なので,）HX＝3,

（中点連結定理より，HK＝12 なので,）KX＝9 となる。すると,

$\mathrm{EX}=\sqrt{81+16}=\sqrt{97}$　$\mathrm{BX}=\sqrt{9+16}=5$ となる。

BY＝y と置くと，XY＝5－y

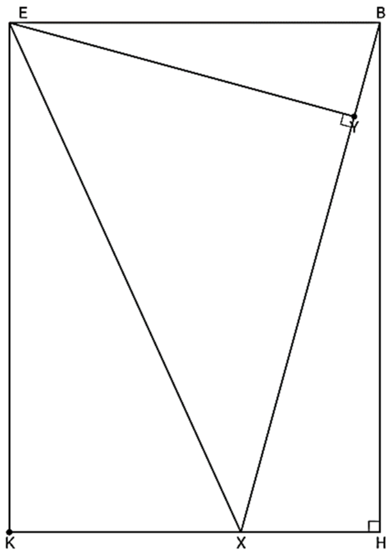
$\mathrm{EY}^2=97-(5-y)^2=144-y^2$

これを解いて，$y=\dfrac{36}{5}$

$\mathrm{EY}=\sqrt{144-\dfrac{1296}{25}}=\sqrt{\dfrac{2304}{25}}=\dfrac{48}{5}\mathrm{cm}$

したがって，体積は,

$\dfrac{1}{3}\times 15\sqrt{3}\times\dfrac{48}{5}=\mathbf{48\sqrt{3}\ cm^3}$

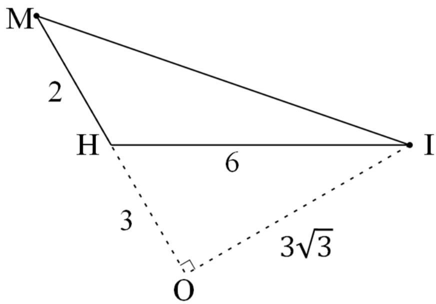


問 2（10 点）

△GMK で，GK＝$6\sqrt{3}$ cmだから，$KM^2 = 16 + 108 = 124$

△EKM で，$EM^2 = 124 + 81 = 205$

点 I から直線 MH に垂線を下ろし交点を O とする。∠IHM＝120°だから，IO＝$3\sqrt{3}$ cm，HO＝3 cm



$MI^2 = 25 + 27 = 52$

CN＝x だから，NI＝$9 - x$

$EN^2 = 108 + x^2$

$MN^2 = 52 + (9 - x)^2$

$EM^2 = EN^2 + MN^2$ より，

$205 = 108 + x^2 + 52 + (9 - x)^2$

整理して，$x^2 - 9x + 18 = 0$　$(x - 6)(x - 3) = 0$

$0 < x < \frac{9}{2}$ より，$x = 3$

$EN = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$，$MN = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$ となるから，

$\triangle EMN = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{13} \times 2\sqrt{22} = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{286} = $ **$3\sqrt{286}$ cm²**

【コメント】

問 1 はオリジナル，問 2 は日比谷の問題です。都立独自校という，その名の通り特殊な入試対応用です。

ただ，独自校は，解答が長くなるだけで，必要な知識 1 個 1 個は難しくありません。いかに長く思考できるかです。それが難しいのだけどね。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/