

立方体切断の難問

範囲：空間図形

難易度：★×6

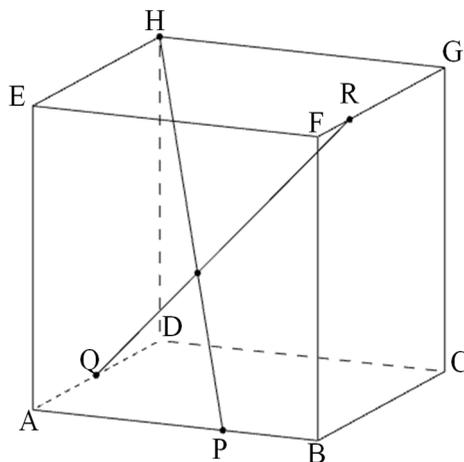
得点

/16

出典：2023年度 灘高校

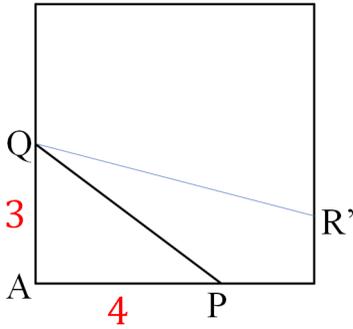
1 辺の長さが 6 の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。辺 AB 上に点 P が、辺 AD 上に点 Q が、辺 FG 上に点 R があり、 $AP=4$ 、 $AQ=3$ である。また、線分 PH と線分 QR は交わっている。

- (1) 線分 FR の長さは であり、線分 QR の長さは である。
- (2) 3 点 P 、 Q 、 R を通る平面で立方体 $ABCD-EFGH$ を切るとき、切り口の面積を求めよ(記述式)。



【解答例】

(1) (4点×2)

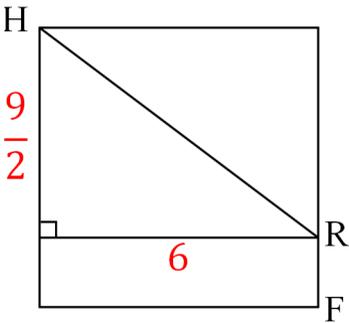


線分PHと線分QRが交わることから、4点P、Q、R、Hは同一平面上にある。したがって、

$$QP // HR \text{ となるから, } FR = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$$

点Rから辺BCに垂線を下ろし交点をR'とする。

$$QR'^2 = \frac{153}{4}, \quad QR = \sqrt{\frac{153}{4} + 36} = \frac{3\sqrt{33}}{2}$$

**【コメント】**

大問1が恐ろしかった今年度ですが、大問6は公立高校でも出せそうな問題ですね（簡単とは言っていません）。たぶん先に解いた方がよさげ。

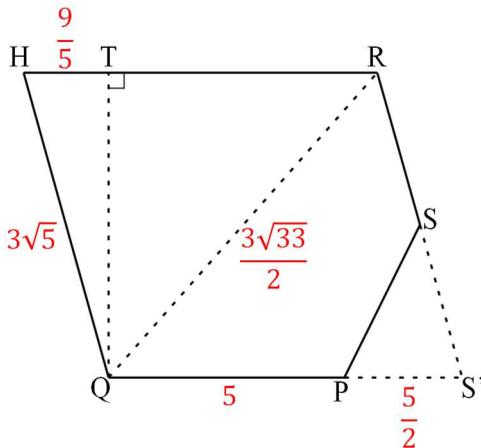
立方体切断について分からない場合、色々ググってみてください。「向かい合う辺は平行！」さえ分かっていたら何とかできることが多いです。私のブログで詳しく解説している記事は、

2016年度北海道：<https://hokkaimath.jp/blog-entry-88.html>

(2)は、SS'とRSの線分比出すのが思いつかなさそう。私も中々思いつきませんでした。まさかの1:1。

(2) (8点)

HQ//RS となる点 S を FB 上にとると、切り口は五角形 HQPSR となる。
 QP//HR なので、直線 QP と直線 RS の交点を S' とすると、二組の対辺
 が平行だから、四角形 QHRS' は平行四辺形となる。

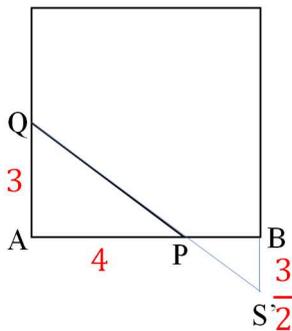


$$QH = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$$

$$HR = \sqrt{36 + \frac{81}{4}} = \frac{15}{2}$$

点 Q から HR に垂線を下ろし
 交点を T とする。HT=x とす
 ると、

$$\begin{aligned} QT^2 &= 45 - x^2 \\ &= \frac{297}{4} - \left(\frac{15}{2} - x\right)^2 \end{aligned}$$



これを解いて、 $x = \frac{9}{5}$,

$$QT = \sqrt{45 - \frac{81}{25}} = \frac{6\sqrt{29}}{5}$$

ここで、 $BS' = \frac{3}{2}$ だから、

$\triangle BS'S \equiv \triangle FRS$ となるので、 $SS' = RS$ となる。

したがって、五角形 HQPSR の面積は、

$$\text{平行四辺形QHRS}' \times \left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2} \times \frac{6\sqrt{29}}{5} \times \frac{11}{12} = \frac{33\sqrt{29}}{4}$$