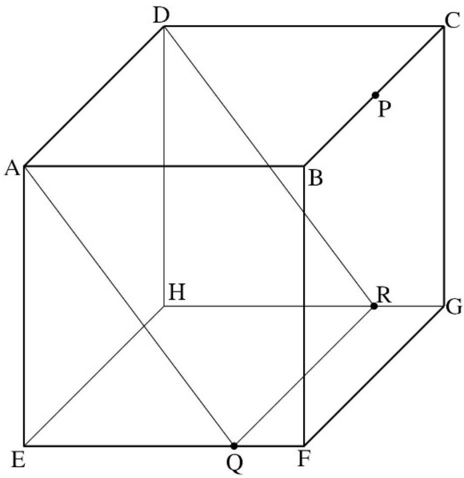
空間図形を平面に		
範囲：中 3 図形	難易度：★★★★☆	得点　　　　　/10

出典：2018 年度　東大寺学園高校

図のように，一辺の長さが 4 の立方体 ABCD-EFGH の辺 BC,EF 上に，それぞれ BP＝2，EQ＝3 となるように点 P，Q をとる。さらに，3 点 D，A，Q を含む平面と辺 HG との交点を R とする。このとき, 次の問いに答えよ。



（1）四角形 BQRP の面積 S を求めよ。

（2）立体 P-AQRD の体積 V を求めよ。

（3）四角柱 AQFB-DRGC に入り，3 つの面 BFGC，ABCD，AQRD のすべてに接する球の半径を求めよ。ただし，球と平面が接するとは，球と平面が 1 点のみを共有することである。このとき，球と平面が共有する点と球の中心を結ぶ線分は平面と垂直になっている。

【解答解説】

（1）（3 点）

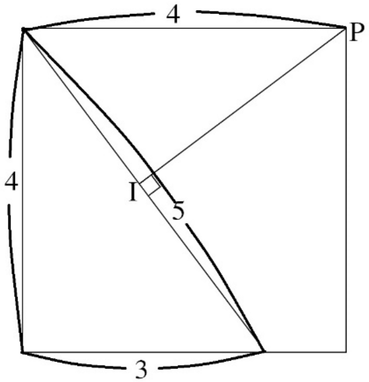
四角形 BQRP は，BP//QR，BP＝2 cm，QR＝4 cm の台形である。

平面 EFGH⊥平面 ABFE なので，BQ⊥QR である。

$BQ=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$ より，

四角形 BQRP $=\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{17}=\mathbf{3\sqrt{17}}$

（2）（3 点）



四角形 ADRQ は長方形で，AD＝4，AQ＝$\sqrt{9+16}=5$ だから，底面である四角形 ADRQ の面積は 4×5＝20

点 P から平面 ADQR に垂線を下ろし，交点を I とする。

点 P を含む正方形 ABEF に平行な平面を考えると，点 P と点 I の関係は，左の図のようになる。

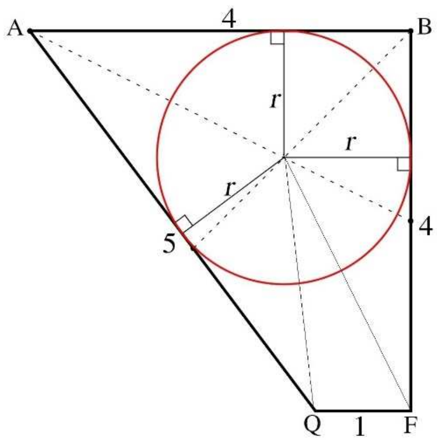
$PI=\frac{4}{5}\times4=\frac{16}{5}$ なので，$V=\frac{1}{3}\times20\times\frac{16}{5}=\mathbf{\frac{64}{3}}$

（3）（4 点）

平面 ABFQ に平行で，面積が最も大きくなるときの球の切り口円が，各面に接していればよい。

すなわち，四角形 ABFQ において，AQ，AB，BF に接する円の半径を考えればよい。

円の中心は，∠A，∠B の二等分線上にある（作図する際は考慮，この問題では考える必要ありません）。



まず，四角形 ABFQ の面積は，

$$\frac{1}{2}\times(1+4)\times4=10$$

またこの面積は，接する円の半径を r とすると，

$$\frac{1}{2}\times5r+\frac{1}{2}\times4r+\frac{1}{2}\times4r+\frac{1}{2}(4-r)$$

$$=6r+2=10$$

$$6r=8\quad r=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

【コメント】

　勉強の成果が試される良い問題です。特に，（3）はありきたりな接する円問題を，良い感じに捻ってあります。

【作成】

高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/