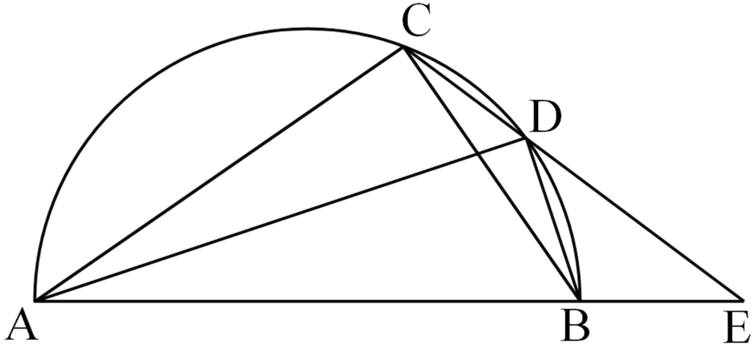
しんどい相似		
範囲：平面図形	難易度：★×6	得点　　　　　/8

出典：2014 年度　大分県

下の図のように，線分 AB を直径とする半円がある。$\overset{\frown}{AB}$上に点 C があり，線分 AC の長さは 13 cm，線分 BC の長さは 9 cm である。$\overset{\frown}{BC}$上に点 D があり，線分 AD の長さが線分 BD の長さの 3 倍である。また，線分 AB の延長と線分 CD の延長の交点を E とする。次の（1）～（3）の問いに答えなさい。



（1）次の①，②の問いに答えなさい。
　①　△ADE と相似な三角形を答えなさい。
　②　△ADE と①で答えた三角形が相似であることを証明しなさい。

（2）線分 BD の長さを求めなさい。

（3）線分 BE の長さを求めなさい。

【ヒント】

(3) △BDE と相似な三角形は……？

【解答例】

(1) ① (1 点)

△CBE

(1) ① (3 点)

△ADE と△CBE において,
共通な角だから, ∠AED＝∠CEB
$\overset{\frown}{BD}$に対する円周角だから, ∠DAE＝∠BCE
2 組の角がそれぞれ等しいから, △ADE∽△CBE

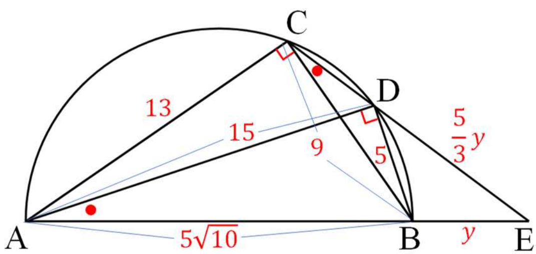
(2) (2 点)

$AB^2 = 13^2 + 9^2 = 250$

$BD = x$と置くと, $AD = 3x$となる。

$x^2 + 9x^2 = 250$, $x^2 = 25$, $x > 0$ より $x = 5$, **$BD = 5$ cm**

(3) (2 点)



BE＝y と置く。

△ADE∽△CBE より,

$DE: BE = AD: CB$

$DE = \frac{15}{9}y = \frac{5}{3}y$

△BDE∽△CAE (※) より, $BD: DE = CA: AE$なので,

$5: \frac{5}{3}y = 13: \left(5\sqrt{10} + y\right)$, $\frac{65}{3}y = 25\sqrt{10} + 5y$, $\frac{50}{3}y = 25\sqrt{10}$, $y = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

$BE = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ cm

（※）

△BDE と△CAE において，

共通な角だから，∠BED＝∠CEA…①

$\overset{\frown}{BD}$に対する円周角だから，∠BCD＝∠BAD

直径に対する円周角だから，∠ACB＝∠ADB＝90°

三角形の外角はそれと隣り合わない二つの内角の和に等しいから，

∠DBE＝90° ＋∠BAD

∠ACE＝90° ＋∠BCD

よって∠DBE＝∠CAE…②

① ，②より 2 組の角がそれぞれ等しいから，△BDE∽△CAE

【コメント】

どうせなら△BDE と△CAE の証明問題を誘導として載せてあげればいいのにね。中々しんどいのではないのでしょうか。気づきづらい。

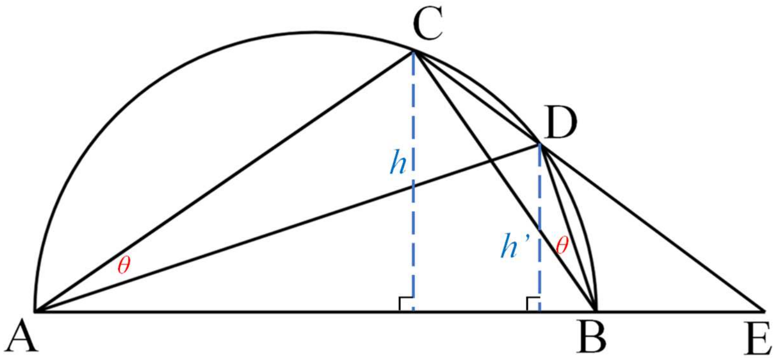
△BDE∽△CAE に気づいても，若干だるい方程式を解かなくてはならないので注意。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 https://hokkaimath.jp/

【公式？】メールフォームで貰ったもの

一般的に以下の図で,

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}=\frac{\mathrm{AC}\times\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}}$$



この公式を用いると, $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}=\dfrac{13\times15}{9\times5}=\dfrac{13}{3}$ と分かるので,

$\dfrac{5\sqrt{10}+\mathrm{BE}}{\mathrm{BE}}=\dfrac{13}{3}$, $\boldsymbol{\mathrm{BE}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\ \mathrm{cm}}$

【証明】※これが正攻法かは分からない

上の図で,

$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{AD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\mathrm{AE}\times(h-h')$$

$$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\mathrm{BE}\times(h-h')$$

$$\frac{\triangle\mathrm{ACD}}{\triangle\mathrm{BCD}}=\boldsymbol{\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}=\frac{\mathrm{AC}\times\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}}}$$

【コメント】僕は知りませんでした……。

【作成】　高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/