

教育的な正方形			
範囲：平面図形	難易度：★×6	得点	/12

出典：2018 年度 山口県

図 1 のような正方形 ABCD があり，その内部に点 P をとる。S さんは，図 2 のように，点 P と，4 つの頂点 A，B，C，D をそれぞれ結ぶ線分をひいてできる $\triangle PAB$ ， $\triangle PCD$ の面積について，次のように予想した。

S さんの予想

$\triangle PAB$ の面積と $\triangle PCD$ の面積の和は，正方形 ABCD の $\frac{1}{2}$ である。

図 1

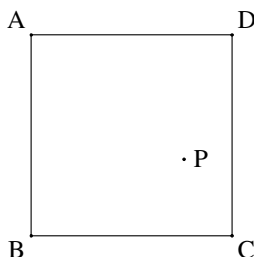


図 2

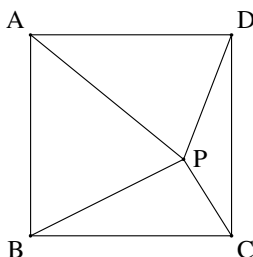
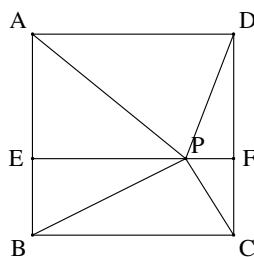


図 3

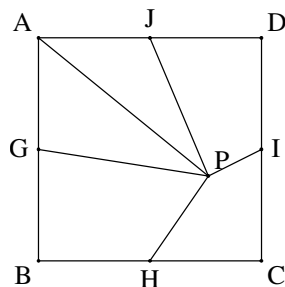


次の (1)，(2) に答えなさい。

- (1) 図 3 のように，点 P を通り，辺 AD に平行な直線と，2 辺 AB，CD の交点をそれぞれ E，F とする。図 3 を用いて，S さんの予想が正しいことを説明しなさい。
- (2) S さんは，図 1 をもとに次の【問題】をつくった。

【問題】

右の図のように，正方形 ABCD の内部に点 P をとり，4 辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ G，H，I，J とする。点 P と，5 つの点 A，G，H，I，J をそれぞれ結ぶ線分をひく。 $\triangle PJA$ の面積が 31 cm^2 ， $\triangle PAG$ の面積が 34 cm^2 ，四角形 PHCI の面積が 25 cm^2 のとき，正方形 ABCD の 1 辺の長さ，四角形 PIDJ の面積を求めよう。



【問題】を解き，正方形 ABCD の 1 辺の長さ，四角形 PIDJ の面積を答えなさい。

【解答例】

(1) (6 点)

Point 大人しく使えそうな辺の長さを文字で置く

正方形 ABCD の 1 辺の長さを a ，線分 EP の長さを x とする。

このとき正方形 ABCD の面積は， $a^2 \cdots \cdots ①$

また，AD//EF なので， $\angle AEF = \angle DFE = 90^\circ \cdots \cdots ②$ ， $PF = a - x \cdots \cdots ③$

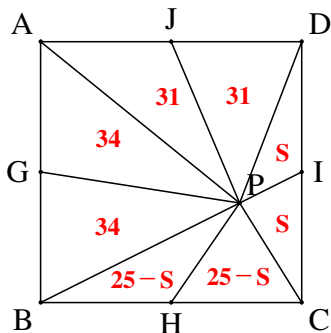
②，③から， $\triangle PAB + \triangle PCD$ は，

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}a(a - x) = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}a^2 \cdots \cdots ④$$

①，④から， $\triangle PAB + \triangle PCD = \frac{1}{2}$ 正方形 ABCD である。

よって，S さんの予想は正しい。

(2) (3 点×2)



$\triangle PJA = 31$ ， $AJ = JD$ より， $\triangle PJD = 31$

同様に， $\triangle PAG = \triangle PBG = 34$

$\triangle PID = S$ とすると， $\triangle PIC = S$ となるので，

$\triangle PHC = \triangle PHB = 25 - S$

(1) より，

$\triangle PAB + \triangle PCD = \triangle PAD + \triangle PBC$ なので，

$$68 + 2S = 112 - 2S, S = 11$$

よって，正方形 ABCD = 180 となるので一辺の長さは $6\sqrt{5}$ cm，

四角形 PIDJ の面積は， $31 + 11 = 42 \text{ cm}^2$

【コメント】

(1) は「正方形 $ABCD$ の 1 辺の長さを a , 線分 EP の長さを x とする」と問題文に書かれてあれば正答率爆上がりしたと思われます。自分で文字設定しなくてはならないので難しい。解答見たら秒で理解できますね。

「 $AD \parallel EF$ なので, $\angle AEF = \angle DFE = 90^\circ$ 」は山口県の模範解答には書いてありました, たぶん書かないと減点でしょうね。説明問題だし一言書いておきましょう。

(2) はおまけ問題です。山口県の問題の出し方, 謎です。たぶん, 私が考えた解法とは違うのを想定していたか?