ピタゴラス数

範囲：計算，式の証明	難易度：★×4	得点　　　　　/12

出典：2019 年度　長崎県

理香さんと拓也さんは，教科書に出てきた数学者ピタゴラスについて，先生と話をしています。3 人の会話を読んで，あとの問いに答えなさい。

理香：ピタゴラスは古代ギリシャの数学者で，弟子たちと「数」について多くの議論をしたみたいですね。
先生：みんなが知っている①約数や，②無理数についても議論したみたいだよ。
理香：ピタゴラスに関するもので，等式 $a^2+b^2=c^2$ をみたす自然数の組 $(a，b，c)$を「ピタゴラス数」というんだって。例えば，$3^2+4^2=5^2$，$5^2+12^2=13^2$ だから，(3，4，5)，(5，12，13)はピタゴラス数になるよ。先生:ちなみに，ピタゴラス数$(a，b，c)$では，c が最も大きい数になるよ。
拓也：おもしろそうだから，他にもあるか探してみようかな。

問 1　下線部①に関して，28 の正の約数をすべて書け。

問 2　下線部②に関して，次の 3 つの数の大小を，不等号を使って表せ。

$$3\sqrt{3}，2\sqrt{6}，\sqrt{26}$$

拓也：昨日，家で(3，4，5)や(5，12，13)以外のピタゴラス数を自分で探そうとしたのですが，できませんでした。
先生：そうだったんだね。それでは，$c=10$ として，等式 $a^2+b^2=10^2$ を考えてみよう。
拓也：あっ，$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$，$c=10$ で，$(\boxed{\text{ア}}，\boxed{\text{イ}}，10)$というピタゴラス数がありますね。
先生：そうだね，よく見つけたね。
理香：先生，私は興味深いことを調べてきました。(SP)「3 以上の奇数 a を 2 乗した数を，連続する 2 つの自然数 b，c (ただし，$b<c$ とする。)の和で表すと，自然数の組$(a，b，c)$は等式 $a^2+b^2=c^2$ をみたす」ということです。例えば，

> $a=3$ のとき，$3^2=4+5$ と表せるので，$b=4$，$c=5$ とすると，(3，4，5)は，$3^2+4^2=5^2$ となる。
> $a=5$ のとき，$5^2=12+13$ と表せるので，$b=12$，$c=13$ とすると，(5，12，13)は，$5^2+12^2=13^2$ となる。
> $a=7$ のとき，$7^2=24+25$ と表せるので，$b=24$，$c=25$ とすると，(7，24，25)は，$7^2+24^2=25^2$ となる。

先生：よく調べてきたね。ちなみに，先生の年齢は 41 歳なんだけど，③41 をふくむピタゴラス数を見つけられるかな。
(数分後)
拓也：やった，見つかりました。この方法で，ピタゴラス数をたくさん見つけることができますね。
先生：そうだね。でも，実はこの方法ではすべてのピタゴラス数を見つけることはできないんだよ。

拓也：そうなんですね，残念。ところで，④ピタゴラス数のうち，連続する 3 つの自然数の組は(3，4，5)の 1 組のような気がするんですけど，その説明はどうしたらいいですか。

理香：それは，連続する 3 つの自然数のうち最も小さい自然数を n として，等式 $a^2+b^2=c^2$ を使って，n が 3 であることを説明すればいいんじゃないかな。

先生：そうだね，理香さんの言うとおりだね。

拓也：じゃあ，やってみます。

問 3　$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$にあてはまる自然数を答えよ。ただし，「$\boxed{\text{ア}}<\boxed{\text{イ}}$」とする。

問 4　下線部③について，会話中の理香さんが調べてきた方法で見つけることができる 41 をふくむピタゴラス数(a，b，c)をすべて答えよ。ただし，$a<b$ とする。また，答えは(3，4，5)の形で答えよ。

問 5　会話中の理香さんの最後の発言を参考にして，下線部④で示した内容が正しいことを，空欄を埋める形で説明せよ。

＜連続する 3 つの自然数のうち最も小さい自然数を n とすると，＞   ＜よって，ピタゴラス数のうち，連続する 3 つの自然数の組は(3, 4, 5)の 1 組である。＞

問 6　暇だったら，下線部(SP)でも証明せよ。

【解答例】

問 1（2 点） **※地味に 1 と 28 忘れないように注意**

$28=2^2\times7$ だから，**1，2，4，7，14，28**

問 2（3 点）

$3\sqrt{3}=\sqrt{27}$，$2\sqrt{6}=\sqrt{24}$，より，$\mathbf{2\sqrt{6}<\sqrt{26}<3\sqrt{3}}$

問 3（完 3 点）

常識 $\boxed{\text{ア}}$ **=6，** $\boxed{\text{イ}}$ **=8**

問 4（3 点）

$a=41^2=1681=840+841$(※)のとき，$\mathbf{(41,840,841)}$

$b=41$ のとき，$c=42$，$a^2=b+c$ となる自然数 a は存在しない。

$c=41$ のとき，$b=40$，$b+c=81=9^2$ となる。$\mathbf{(9,40,41)}$

(※)$1681\div2=840.5$ より，連続する 2 つの自然数の和で表すと 840 と 841

問 5（4 点）

＜連続する 3 つの自然数のうち最も小さい自然数を n とすると，＞

真ん中の数は $n+1$，最も大きい数は $n+2$ と表せる。このとき，

$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$ をみたす。これを解くと，

$n^2-2n-3=0$　$(n-3)(n+1)=0$　$n>0$ より，$n=3$

＜よって，ピタゴラス数のうち，連続する 3 つの自然数の組は(3, 4, 5)の 1 組である。＞

問 6

$a=2n+1\ (n\geq1)$ とし，$a^2=4n^2+4n+1$

$4n^2+4n+1$ を連続した 2 つの自然数 b，c で表すと，

$b=2n^2+2n$，$c=2n^2+2n+1$　と表される。

$a^2=(2n+1)^2$，$b^2=\{2n(n+1)\}^2$

$$c^2=\left(2n^2+2n+1\right)^2=(2n(n+1)+1)^2=\{2n(n+1)\}^2+4n(n+1)+1$$

$$=\{2n(n+1)\}^2+4n^2+4n+1=\{2n(n+1)\}^2+(2n+1)^2=b^2+a^2$$

したがって，3 以上の奇数 a を 2 乗した数を，連続する 2 つの自然数 b，c (ただし，$b<c$ とする。)の和で表すと，自然数の組(a，b，c)は等式 $a^2+b^2=c^2$ をみたす。

【コメント】

大学入試でよく出題される題材ですね，ピタゴラス数。有名なのは 2006 年一橋大学の問題でしょうか。色々なサイトでたくさん解説されています。

https://kamelink.com/blog/2018/09/15/1-7-06-hitotubasidai-1/

信州大の問題も面白いですね。

https://kamelink.com/blog/tag/%E3%83%94%E3%82%BF%E3%82%B4%E3%83%A9%E3%82%B9%E6%95%B0/page/2/

中学生は背理法をまだ学習していないのでまだ全ては解けませんが，雰囲気だけでも見てみたら面白いかも。

問 4 の考え方は中学入試でよく出題されます。

何となく，公立高校入試らしくない問題ですね。すごくこだわり強い作問者がいたに違いない。

【作成】高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/