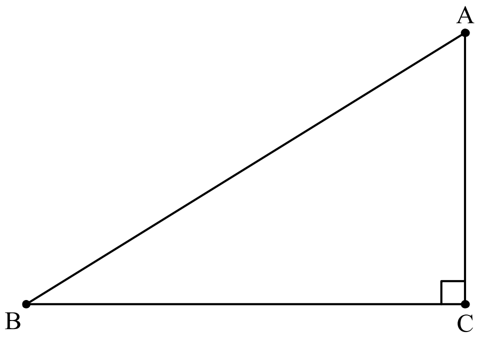
学校裁量問題の問題と解説②

【出典：2010 年度　北海道　高校入試　過去問】

問 1　下の図のように，AB＝a cm，BC＝b cm，CA＝$2\sqrt{15}$ cm，∠BCA＝90°の△ABC があります。a，b がともに自然数となる a，b の値の組を 2 つ求めなさい。



問 2　箱 P，Q があり，箱 P の中には，1，2，3，4，5，6 の数字を 1 つずつ書いた 6 個のボールが，箱 Q の中には，0，2，4，6 の数字を 1 つずつ書いた 4 個のボールが入っています。箱 P，Q の中からそれぞれ 1 個のボールを取り出すとき，箱 P の中から取り出したボールに書かれた数字を a，箱 Q の中から取り出したボールに書かれた数字を b とし，（a, 3）を座標とする点を A，（b, a）を座標とする点を B とします。

　このとき，線分 AB の長さが$\sqrt{5}$になる確率を求めなさい。

問 3　下の図 1 のように，1 辺の長さが 4 cm の立方体 ABCD-EFGH が平面 P の上にあります。辺 CD の中点を M とします。この立方体に，次の【1】,【2】の操作を順に行います。図 2 は，【1】の操作を行った後の立方体です。このとき，次の（1），(2）に答えなさい。ただし，円周率はπを用いなさい。

【1】辺 EF を軸として，2 点 A，B が平面 P 上の点となるように，90°まわす。
【2】【1】によって動いた図 2 の立方体の辺 AE を軸として，2 点 D，H が平面 P 上の点となるように 90°まわす。

図 1

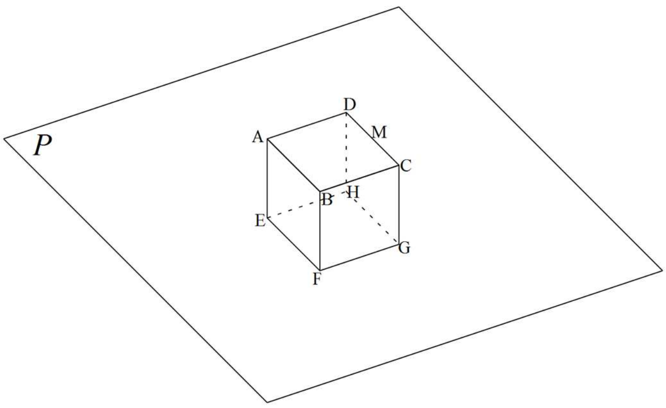
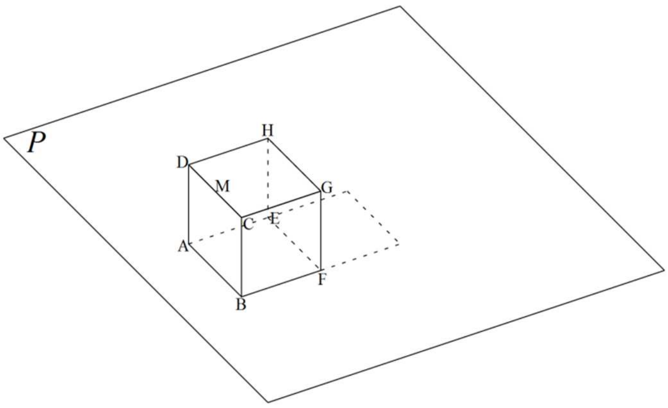


図 2



(1)【1】,【2】のそれぞれの操作によって，点 G が動いてできた弧の長さの和を求めなさい。

(2)【1】,【2】のそれぞれの操作によって，線分 DM が動いて出来た図形の面積の和を求めなさい。

【解答例】 配点 18点/60点

問1（2点×2）正答率21.6%

三平方の定理より，

$a^2 = +60 \quad a^2 - b^2 = 60 \quad (a+b)(a-b) = 60$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$，$a+b > a-b$ だから，

$a+b$	$a-b$
60	1
30	2
20	3
15	4
12	5
10	6

ここにある連立方程式を全部解いて……とまではいかなくても，

$\begin{cases} a+b=c \\ a-b=d \end{cases}$ とすると，$c+d=2a, c-d=2b$

だから，和と差が2の倍数である必要がある。

よって，ありえるのは色付けされたもののみ。

2つの連立方程式を解いて，

(a, b) ＝ $(16, 14)$ $(8, 2)$

【コメント】

随分面倒くさい問題ですね，中学生が連立方程式は2つしか解かなくて良いと思いつくのは難しいです。

と思ったら，正答率21.6%です。頑張りましたね，受験生。

問2（5点）正答率3.9%

地道にやるしかない。三平方の定理より，

AB＝$\sqrt{(a-b)^2+(3-a)^2}$

2乗するからどちらも平方数となるので，

1^2+2^2 の計算式になれば良い。

b＝0のとき，

$\sqrt{a^2+(3-a)^2}$

a＝1, 2

b＝2のとき，

$\sqrt{(a-2)^2+(3-a)^2}$

a＝1, 4

b＝4のとき，

$\sqrt{(a-4)^2+(3-a)^2}$

a＝2, 5

b＝6のとき，

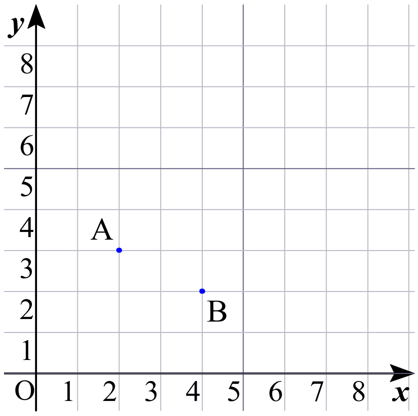
$\sqrt{(a-6)^2+(3-a)^2}$

a＝4, 5

(a, b)の組は全部で6×4＝24通りあるから，求める確率は，$\frac{8}{24}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

＜まだ比較的楽かもしれない別解＞

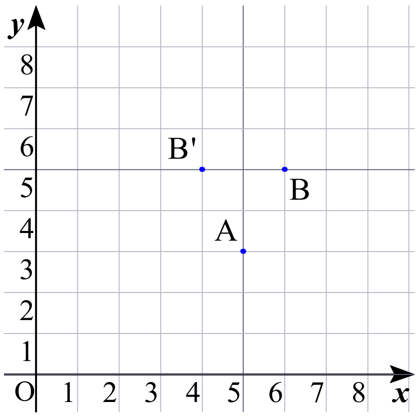
a を固定し，座標平面上で考える。$\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}$ なので，2マス分の対角線となればよい。



a＝1，2 のとき，AB＝$\sqrt{5}$ となる b の値は1つずつある。

(左図は a＝2)

a＝3 のとき，AB＝$\sqrt{5}$ とならない。



a＝4, 5, 6 のとき，AB＝$\sqrt{5}$ となる b の値は2つずつある。

(左図は a＝5)

1×2＋2×3

＝8通り

(a, b)の組は全部で6×4＝24通りあるから，求める確率は，$\frac{8}{24}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

【コメント】

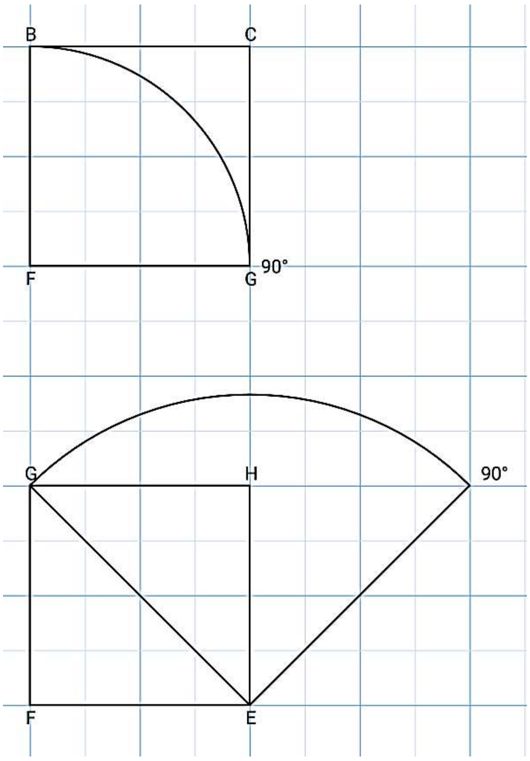
高校数学では，このような「場合分け」が重要です。だからって裁量でこんなムズイの出さなくていいと思います。

問 3

（1）（4 点）正答率 2.6%

【1】

【2】



【1】～【2】の操作で，上図のように動く。

【1】$8\pi \times \frac{1}{4} = 2\pi$

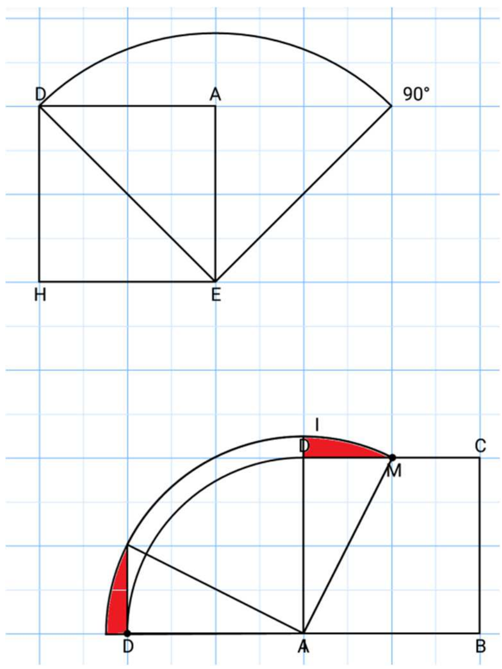
【2】$8\sqrt{2} \times \frac{1}{4} = 2\sqrt{2}\pi$

合計 $\boldsymbol{\left(2+2\sqrt{2}\right)\pi}$ **cm**

（2）（5 点）正答率 0.0%

【1】

【2】



【1】～【2】の操作で，上図のように動く。

【1】は，D も M も，円弧の一部を描く。したがって，DM が縦の長さ，D が作る弧が横の長さの長方形となるので，面積は，$2 \times 2\sqrt{2}\pi = 4\sqrt{2}\pi$

【2】は，赤い（網掛け）部分の面積が同じなので，結局おうぎ形の面積を求めればよい。

<u>※線分の軌跡は，回転の中心から最も近い点と最も遠い点の軌跡の間の図形となる。今回は直角三角形なので，単純に点 **D** と点 **M** の軌跡を考えればよい。</u>

線分 AM によるおうぎ形の面積

$AM = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ cm

$2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \pi \times \frac{1}{4} = 5\pi$

線分 AD によるおうぎ形の面積

$4 \times 4 \times \pi \times \frac{1}{4} = 4\pi$

$5\pi - 4\pi = \pi$

合計面積は，$\boldsymbol{\left(1+4\sqrt{2}\right)\pi}$ $\mathbf{cm^2}$

【コメント】

十二分に時間があれば解けそうですが，ただでさえ難しいこの年の入試問題で，最後とくれば，誰も解けません。

昨年度の裁量初導入の年の数学は，裁量といえども，何とか頑張れば解ける問題でした。今年度は全国的に見ても難しすぎる年でした。裁量問題の容赦のなさが半端ない。

たぶん，2009 年度意外に正答率高かったから，気合が入っちゃったのでしょうね。入試としては失敗です。

（通しで解くなどの確認を怠っている気がします。かなり数学が出来る人でも厳しい気がします。）