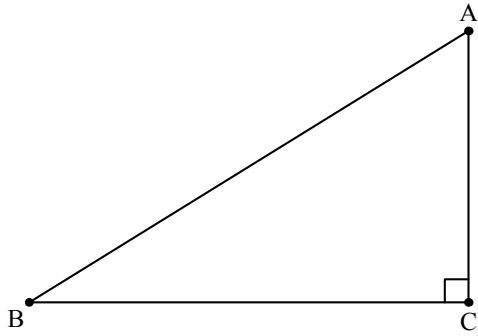


学校裁量問題の問題と解説②

【出典：2010年度 北海道 高校入試 過去問】

問1 下の図のように、 $AB=a$ cm, $BC=b$ cm,
 $CA=2\sqrt{15}$ cm, $\angle BCA=90^\circ$ の $\triangle ABC$ があります。 a, b がともに自然数となる a, b の値の組を2つ求めなさい。



問2 箱 P, Q があり, 箱 P の中には, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字を1つずつ書いた6個のボールが, 箱 Q の中には, 0, 2, 4, 6 の数字を1つずつ書いた4個のボールが入っています。箱 P, Q の中からそれぞれ1個のボールを取り出すとき, 箱 P の中から取り出したボールに書かれた数字を a , 箱 Q の中から取り出したボールに書かれた数字を b とし, $(a, 3)$ を座標とする点を A, (b, a) を座標とする点を B とします。

このとき, 線分 AB の長さが $\sqrt{5}$ になる確率を求めなさい。

問3 下の図1のように、1辺の長さが4 cmの立方体 ABCD-EFGH が平面 P の上にあります。辺 CD の中点を M とします。この立方体に、次の【1】、【2】の操作を順に行います。図2は、【1】の操作を行った後の立方体です。このとき、次の(1)、(2)に答えなさい。ただし、円周率は π を用いなさい。

【1】 辺 EF を軸として、2点 A, B が平面 P 上の点となるように、 90° まわす。

【2】 【1】によって動いた図2の立方体の辺 AE を軸として、2点 D, H が平面 P 上の点となるように 90° まわす。

図1

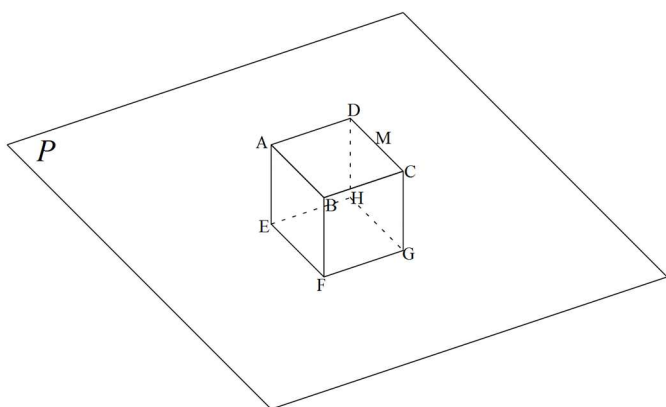
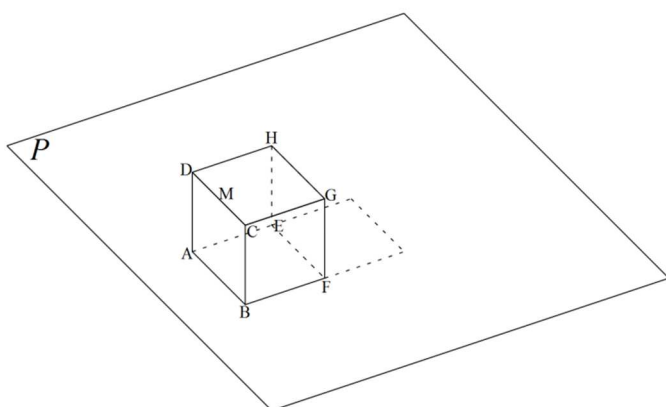


図2



- (1) 【1】、【2】のそれぞれの操作によって、点 G が動いてできた弧の長さの和を求めなさい。
- (2) 【1】、【2】のそれぞれの操作によって、線分 DM が動いて出来た図形の面積の和を求めなさい。

問1 (2点×2) 正答率 21.6%

三平方の定理より、

$$a^2 = +60 \quad a^2 - b^2 = 60 \quad (a+b)(a-b) = 60$$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $a+b > a-b$ だから、

$a+b$	$a-b$
60	1
30	2
20	3
15	4
12	5
10	6

ここにある連立方程式を全部解いて……とまではいかなくても、

$$\begin{cases} a+b=c \\ a-b=d \end{cases} \text{ とすると, } c+d=2a, c-d=2b$$

だから、和と差が2の倍数である必要がある。

よって、ありえるのは色付けされたもののみ。

2つの連立方程式を解いて、

$$(a, b) = (16, 14) (8, 2)$$

【コメント】

随分面倒くさい問題ですね、中学生が連立方程式は2つしか解かなくて良いと思いつくのは難しいです。

と思ったら、正答率 21.6%です。頑張りましたね、受験生。

問2 (5点) 正答率 3.9%

地道にやるしかない。三平方の定理より、

$$AB = \sqrt{(a-b)^2 + (3-a)^2}$$

2乗するからどちらも平方数となるので、

$1^2 + 2^2$ の計算式になれば良い。

$b=0$ のとき、

$$\sqrt{a^2 + (3-a)^2}$$

$$a=1, 2$$

$b=2$ のとき、

$$\sqrt{(a-2)^2 + (3-a)^2}$$

$$a=1, 4$$

$b=4$ のとき、

$$\sqrt{(a-4)^2 + (3-a)^2}$$

$$a=2, 5$$

$b=6$ のとき、

$$\sqrt{(a-6)^2 + (3-a)^2}$$

$$a=4, 5$$

(a, b) の組は全部で $6 \times 4 = 24$ 通りあるから、求める確率は、

$$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

【コメント】

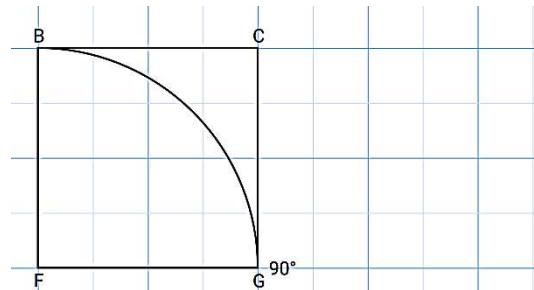
もっと良い解法あるかもしれません。かなりきつい問題ですね。

高校数学では、このような「場合分け」が重要です。だからって裁量でこんなムズイの出さなくていいと思います。

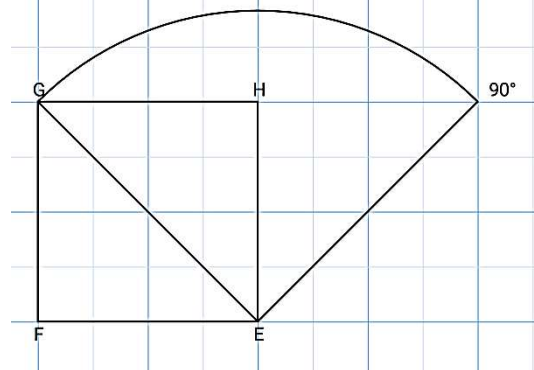
問3

(1) (4点) 正答率 2.6%

【1】



【2】



【1】～【2】の操作で、上図のように動く。

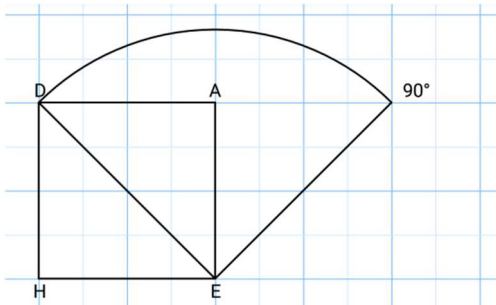
$$\text{【1】 } 8\pi \times \frac{1}{4} = 2\pi$$

$$\text{【2】 } 8\sqrt{2} \times \frac{1}{4} = 2\sqrt{2}\pi$$

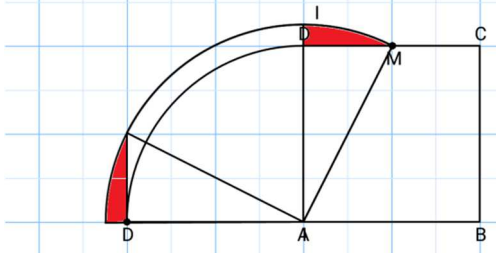
$$\text{合計 } (2 + 2\sqrt{2})\pi \text{ cm}$$

(2) (5点) 正答率 0.0%

【1】



【2】



【1】～【2】の操作で、上図のように動く。

【1】は、DもMも、円弧の一部を描く。したがって、DMが縦の長さ、Dが作る弧が横の長さの長方形となるので、面積は、 $2 \times 2\sqrt{2}\pi = 4\sqrt{2}\pi$

【2】は、赤い（網掛け）部分の面積が同じなので、結局おうぎ形の面積を求めればよい。

線分AMによるおうぎ形の面積

$$AM = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \pi \times \frac{1}{4} = 5\pi$$

線分ADによるおうぎ形の面積

$$4 \times 4 \times \pi \times \frac{1}{4} = 4\pi$$

$$5\pi - 4\pi = \pi$$

合計面積は、 $(1 + 4\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2$

【コメント】

十二分に時間があれば解けそうですが、ただでさえ難しいこの年の入試問題で、最後とくれば、誰も解けません。

昨年度の裁量初導入の年の数学は、裁量といえども、何とか頑張れば解ける問題でした。今年度は全国的に見ても難しすぎる年でした。裁量問題の容赦のなさが

半端ない。

たぶん、2009年度意外に正答率高かったから、気合が入っちゃったのじゃないかな。入試としては失敗です。

(通しで解くなどの確認を怠っている気がします。かなり数学が出来る人でも厳しい気がします。)