学校裁量問題の問題と解説⑧

【出典：2016 年度　北海道　高校入試　過去問】

問 1　図 1 のように，半径が 3 cm の円の円周を 12 等分する 12 個の点があり，そのうちの 1 つを S とします。

　点 P，Q は点 S を同時に出発し，P は矢印アの方向へ，1 秒ごとに円周上の点を 1 個ずつ，Q は矢印イの方向へ，1 秒ごとに円周上の点を 2 個ずつ移動します。例えば，1 秒後の 3 点 S，P，Q のそれぞれの位置は図 2 のようになります。次の(1)，(2) に答えなさい。

(1) 5 秒後に，3 点 S，P，Q を結んでできる三角形の∠SPQ の大きさを求めなさい。

(2) 155 秒後に，3 点 S，P，Q を結んでできる△SPQ をかき入れ，点 P，Q をそれぞれ示しなさい。また，このときの△SPQ の面積を求めなさい。

図 1

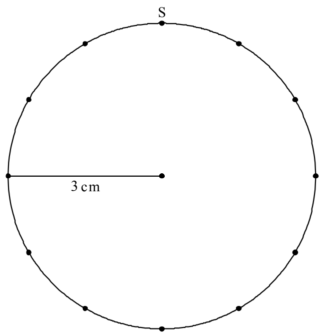
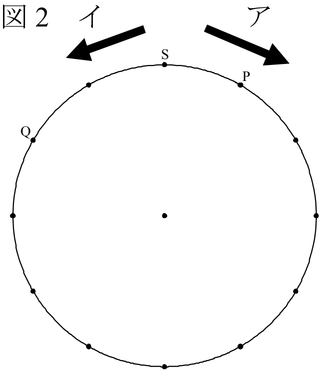
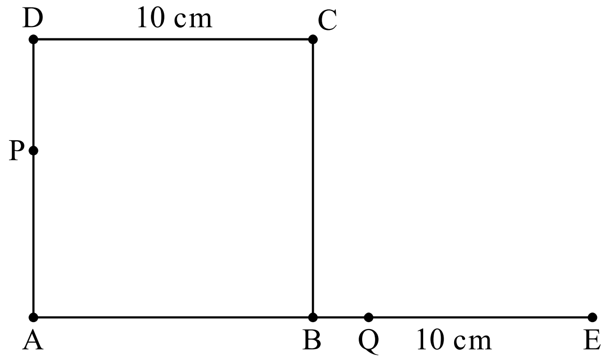


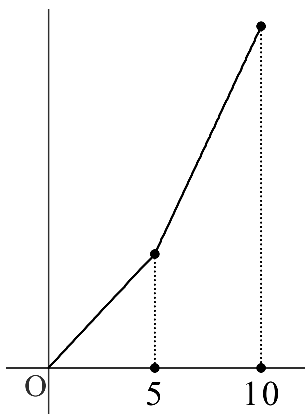
図 2　イ　ア



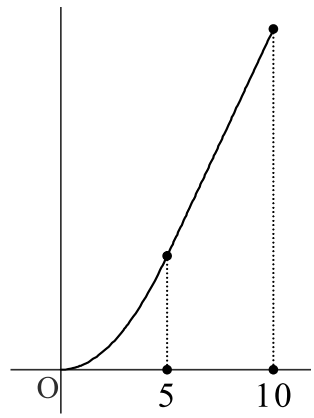
問 2　右の図のように，1 辺が 10 cm の正方形 ABCD があります。頂点 B から辺 AB を 10 cm 延長したところに点 E をとり，辺 AD，線分 AE 上にそれぞれ点 P, Q を，2AP＝AQ となるようにとります。AP の長さを x cm とし，正方形 ABCD と直角三角形 APQ が重なってできる部分の面積を y cm^2 とします。このときの横軸 x と縦軸 y の関係を表したグラフとして最も適当なものを，次の**ア**～**オ**から選びなさい。ただし，点 O は原点とします。



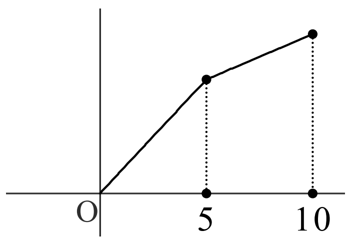
ア



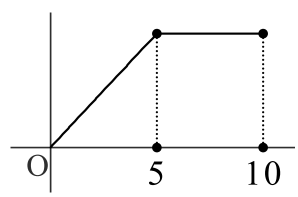
イ



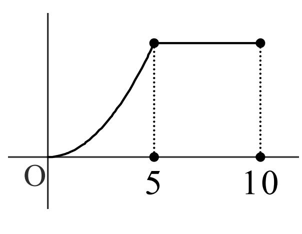
ウ



エ



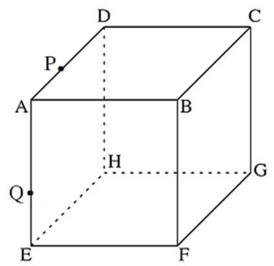
オ



問 3　図 1 のように，1 辺が 10 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。辺 AD，AE 上にそれぞれ点 P，Q を，2AP＝AQ となるようにとります。

次の（1），（2）に答えなさい。

図 1



（1）図 1 の立方体を 3 点 B，P，Q を通る平面で切ります。頂点 A をふくむ立体の体積が 20 cm^3 のとき，AP の長さは何 cm になりますか。AP の長さを x cm として方程式をつくり，求めなさい。

（2）図 2 のように，1 から 9 までの数字を 1 つずつ書いた 9 個のボールがあります。この 9 個のボールを袋に入れ，袋の中から 1 個のボールを取り出し，そのボールに書かれた数を a とします。

図 3 は，図 1 の立方体で，AP＝4 cm としたものです。辺 BC 上に，点 R をとり，BR の長さを a cm とします。

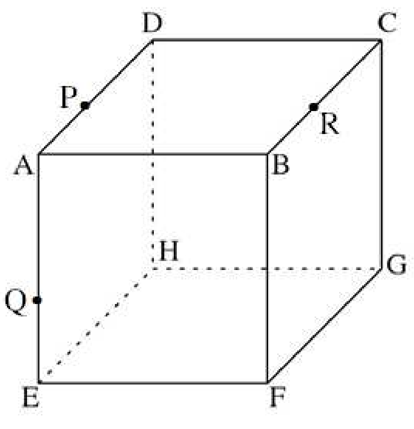
図 3 の立方体を 3 点 P，Q，R を通る平面で切りとるときの切り口の図形が，五角形となる確率を求めなさい。

図 2

①　②　③　④　⑤

⑥　⑦　⑧　⑨

図 3



【解答例】 配点 21 点/60 点

問 1（1）（3 点）正答率 63.2%

5 秒後の位置は，指で数えるなりすれば分かる。

弧 SQ は円周の長さの$\frac{1}{6}$倍である。

よって，$\angle SPQ = 180 \times \frac{1}{6} = \mathbf{30^\circ}$

問 1（2）（6 点）正答率 0.9%

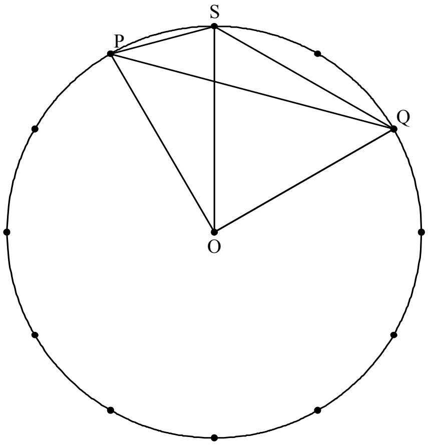
P について，155＝12×12+11

（12 周して，11 進む）

Q について，155＝6×25+5

（25 周して 5 進む）

よって P，Q の位置は，下のようになる。



【P，Q の位置 2 点】

そのまま△SPQ の面積を求めるのは辛いので，円の中心 O を利用する。

中心を O とする。

中心角と弧の長さの関係から，

$\angle POQ = 360 * \frac{3}{12} = 90^\circ \quad \angle SOQ = 360 * \frac{2}{12} = 60^\circ$

$\angle SOP = 30^\circ$　よって，

$\triangle SOQ = \frac{1}{2} * 3 * \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2　（正三角形）

$\triangle SOP = \frac{1}{2} * 3 * \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ cm^2　（S から OP に垂線）

$\triangle OPQ = \frac{1}{2} * 3 * 3 = \frac{9}{2}$ cm^2　（直角二等辺三角形）

求める面積は，

$\frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{4} = \mathbf{\frac{9\sqrt{3}-9}{4}}$ **cm^2**

【コメント】

（2）は，やばいと思って逃げるべき。逃げなかった人が多くて，問 2，問 3 の正答率低下につながった。

問 2（4 点）正答率 37.8%

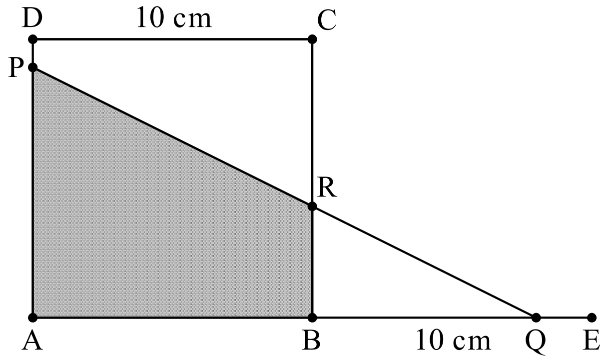
$0 \leqq x \leqq 5$ のとき，

$\triangle APQ = y = \frac{1}{2} * 2x * x = x^2$

この時点で，イかオ。なんだけど，$5 \leqq x$ のとき，明らかに重なる部分面積増えている。増えているのはイである。よって　イ

【コメント】

真面目に考えた人が可哀想。なお，$5 \leqq x$ では以下のようになる。



QB＝$2x$－10，QA＝$2x$，AP＝x で，△QBR∽△QAP より，$(2x-10):2x = BR:x \quad BR = x-5$

重なった部分の面積は，

$\frac{1}{2} \times (x + x - 5) \times 10 = 5(2x-5) = 10x - 25$

となる。直線となるから，どちらにせよイ。

もう少し選択肢を考えるべきだった。

問 3（1）（4 点）正答率 39.3%

AP＝x，AQ＝$2x$，AB＝10 なので，体積は

$\frac{1}{2} * x * 2x * 10 * \frac{1}{3} = 20$　**【方程式 2 点】**

$\frac{10}{3}x^2 = 20 \quad x^2 = 6 \ldots$①**【1 点】**　$x > 0$ **より**，$x = \sqrt{6}$

$\sqrt{6}$ cm

【コメント】

明らかにサービス問題です。教科書レベル。しかし，前述の問 1 のせいで，簡単だと気づけなかった受験生が多かったと思われます。

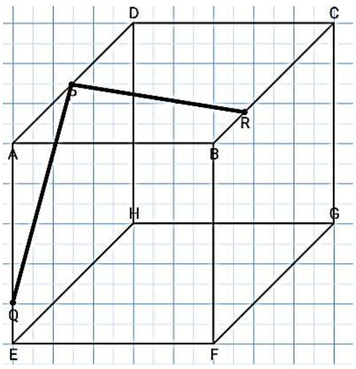
問３（2）（4 点）正答率 9.0%

＜立体切断の大原則＞

１，同一平面にある点は結んでよい。

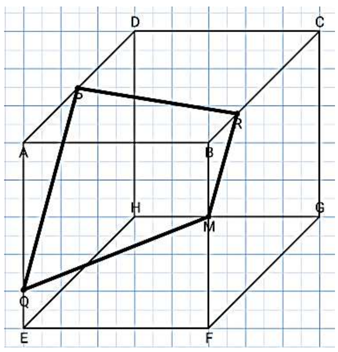
ということで，まず PQ を結ぶ。

PR も結んでよい。



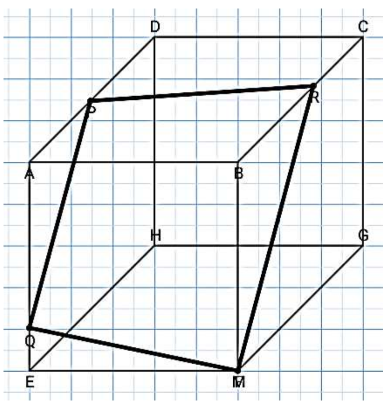
２，向かい合う辺は平行

R から，PQ に平行な線を引く。



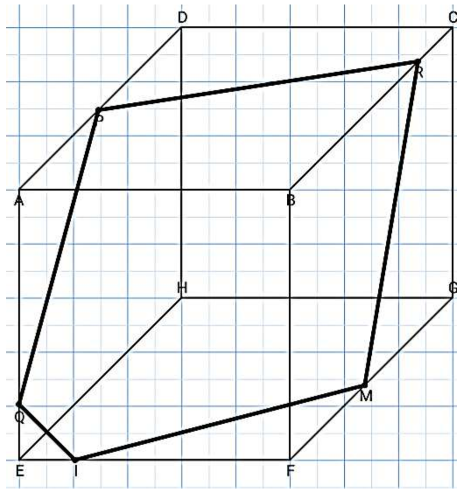
このとき，点 M が線分 BF 上にあるなら，M と Q を結べばいいだけなので，切り口は四角形となってしまう。BR＝1，2，3，4 のときは，明らかに BF 上にきてしまう。（AP≧BR だから。）

BR＝5 のとき，AP : AQ＝1 : 2 であることを考えると，BR : BM＝1 : 2 となるから，BM＝10 cm。ギリギリ，BF 上にあるので，四角形となる。



よって，残りの 6～9 が五角形となる。

ちなみにどうやって作図するのかと言うと，



２まで同じ。

M から線分 PR に平行な線を引き，EF との交点を I とする。後は，I と Q を結べばいいだけ。ご覧のとおり，切り口が五角形となる。

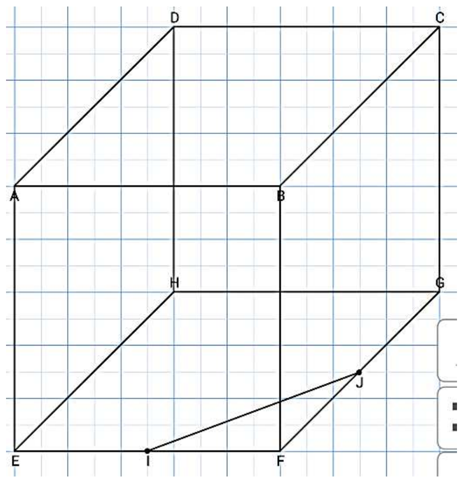
4/9

※ちなみに，同一平面にも無く，平行な線も無い場合

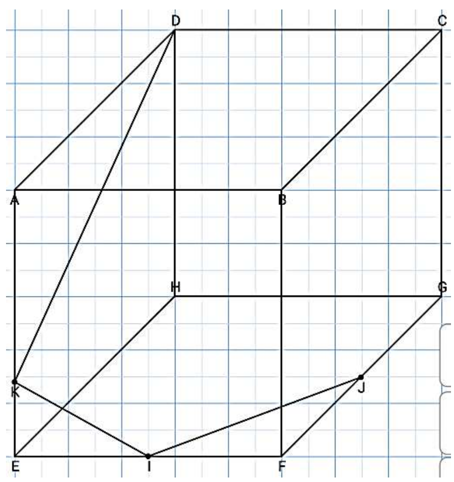
例）　辺 EF の中点を I，辺 FG の中点を J とします。

3 点 D，I，J を通る平面で立方体を切断します。

１，まず IJ を結ぶ。

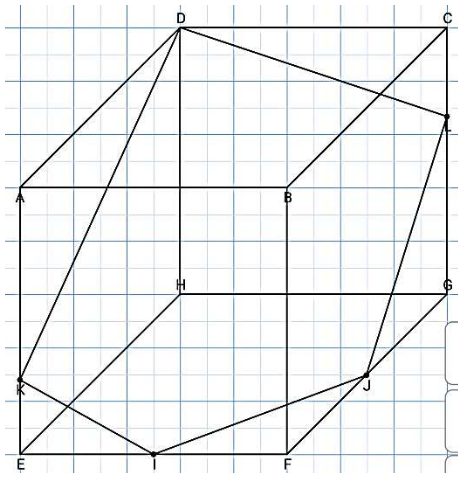


２，DI は，DI が（面を通り）最短距離となるように。



最短距離となるように引けばよいから，このとき，△DKA∽△IKE となる。展開図を書いて，長方形 DHFB を書き，一直線を引けばわかりやすい。

３，後は，向かい合う辺と平行になるように引けばよい。



これで君も切断面マスターだ！

【コメント】

「知っていれば」瞬殺。知らない中学生が多かったと思われる。

問題が発表された当初，多くの塾の先生は「なんて簡単なんだ」と意見しましたが，問 1（2）の難しさ，問 2 を真面目に解いてしまった，問 3（1）を簡単だと見抜けない，問 3（2）を知らない受験生が予想以上に多かったのか，平均点は低め。問題演習においては，難易度を見極める能力も重要になってきます。