

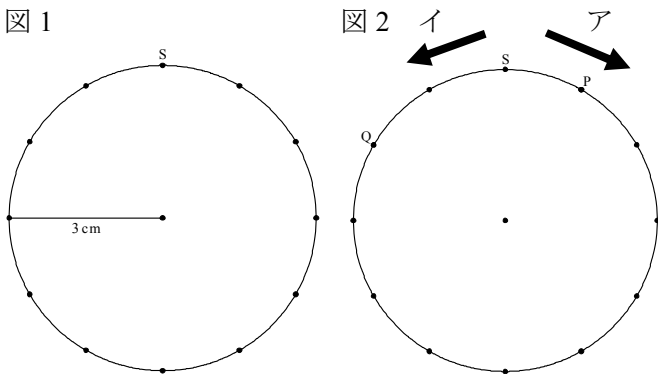
学校裁量問題の問題と解説④

【出典：2016年度 北海道 高校入試 過去問】

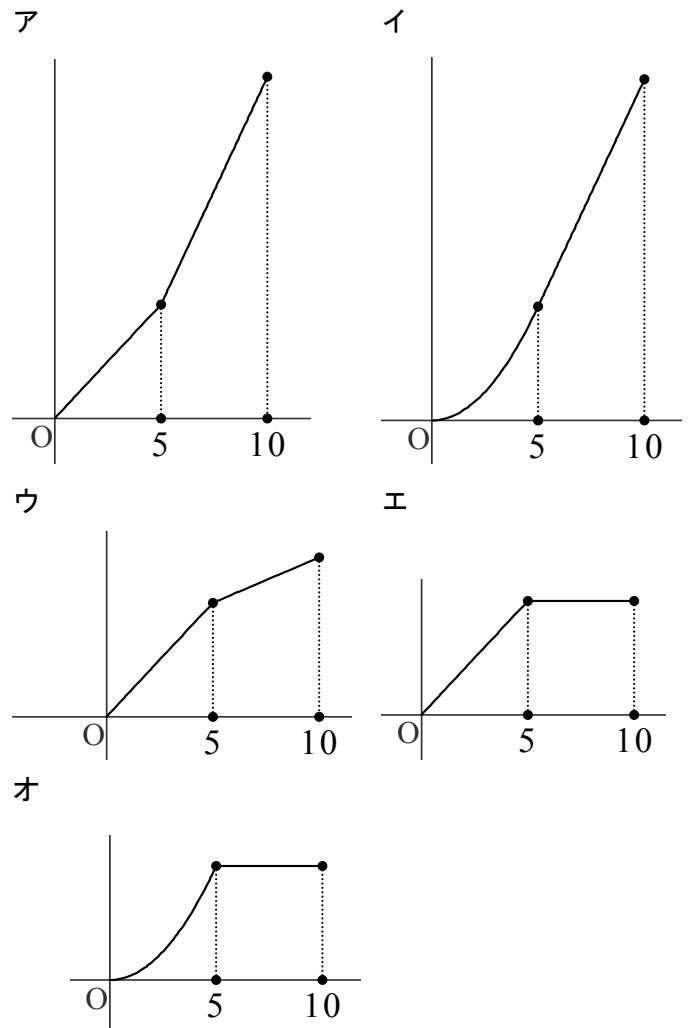
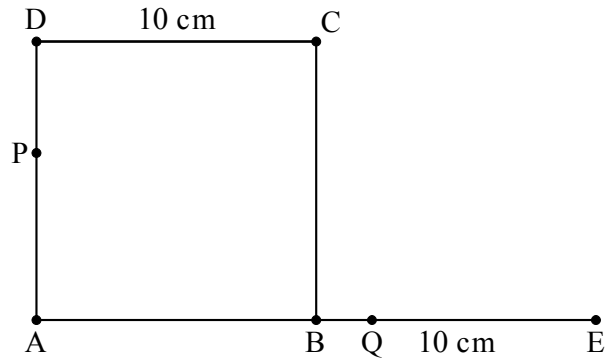
問1 図1のように、半径が3 cmの円の円周を12等分する12個の点があり、そのうちの1つをSとします。

点P、Qは点Sを同時に出発し、Pは矢印アの方
向へ、1秒ごとに円周上の点を1個ずつ、Qは
矢印イの方
向へ、1秒ごとに円周上の点を2個ず
つ移動します。例えば、1秒後の3点S、P、Qの
それぞれの位置は図2のようになります。次の(1)、
(2)に答えなさい。

- (1) 5秒後に、3点S、P、Qを結んでできる三角形の
 $\angle SPQ$ の大きさを求めなさい。
- (2) 155秒後に、3点S、P、Qを結んでできる $\triangle SPQ$
をかき入れ、点P、Qをそれぞれ示しなさい。ま
た、このときの $\triangle SPQ$ の面積を求めなさい。

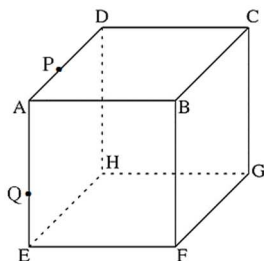


問2 右の図のように、1辺が10 cmの正方形ABCD
があります。頂点Bから辺ABを10 cm延長した
ところに点Eをとり、辺AD、線分AE上にそれ
ぞれ点P、Qを、 $2AP=AQ$ となるようにとります。
APの長さをx cmとし、正方形ABCDと直角三角
形APQが重なってできる部分の面積を $y \text{ cm}^2$ とし
ます。このときの横軸xと縦軸yの関係を表した
グラフとして最も適当なものを、次のア～オから
選びなさい。ただし、点Oは原点とします。



問 3 図 1 のように、1 辺が 10 cm の立方体 ABCD-EFGH があります。辺 AD, AE 上にそれぞれ点 P, Q を、 $2AP=AQ$ となるようにとります。次の (1), (2) に答えなさい。

図 1



- (1) 図 1 の立方体を 3 点 B, P, Q を通る平面で切ります。頂点 A をふくむ立体の体積が 20 cm^3 のとき、AP の長さは何 cm になりますか。AP の長さを $x \text{ cm}$ として方程式をつくり、求めなさい。
- (2) 図 2 のように、1 から 9 までの数字を 1 つずつ書いた 9 個のボールがあります。この 9 個のボールを袋に入れ、袋の中から 1 個のボールを取り出し、そのボールに書かれた数を a とします。

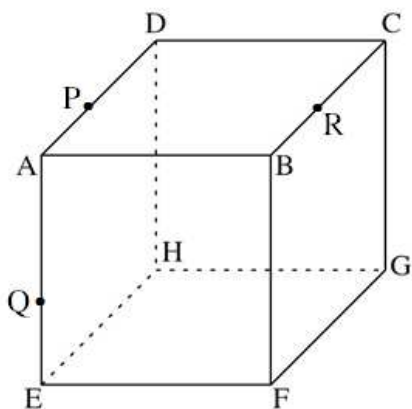
図 3 は、図 1 の立方体で、 $AP=4 \text{ cm}$ としたものです。辺 BC 上に、点 R をとり、BR の長さを $a \text{ cm}$ とします。

図 3 の立方体を 3 点 P, Q, R を通る平面で切りとるときの切り口の図形が、五角形となる確率を求めなさい。

図 2

- ① ② ③ ④ ⑤
- ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

図 3



問 1 (1) (3 点) 正答率 63.2%

5 秒後の位置は、指で数えるなりすれば分かる。

弧 SQ は円周の長さの $\frac{1}{6}$ 倍である。

よって、 $\angle SPQ = 180 \times \frac{1}{6} = 30^\circ$

問 1 (2) (6 点) 正答率 0.9%

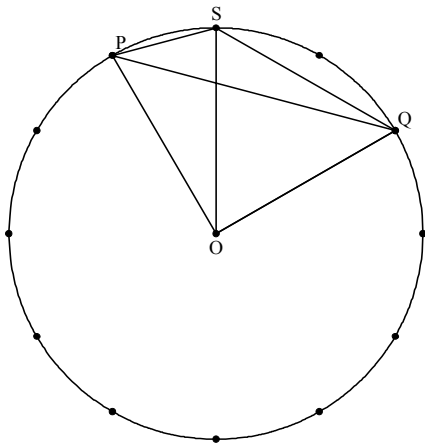
P について、 $155 = 12 \times 12 + 11$

(12 周して、11 進む)

Q について、 $155 = 6 \times 25 + 5$

(25 周して 5 進む)

よって P, Q の位置は、下のようになる。



【P, Q の位置 2 点】

そのまま $\triangle SPQ$ の面積を求めるのは辛いので、円の中心 O を利用する。

中心を O とする。

中心角と弧の長さの関係から、

$$\angle POQ = 360 \times \frac{3}{12} = 90^\circ \quad \angle SOQ = 360 \times \frac{2}{12} = 60^\circ$$

$\angle SOP = 30^\circ$ よって、

$$\triangle SOQ = \frac{1}{2} * 3 * \frac{3}{2} \sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 \quad (\text{正三角形})$$

$$\triangle SOP = \frac{1}{2} * 3 * \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \text{ cm}^2 \quad (\text{S から OP に垂線})$$

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} * 3 * 3 = \frac{9}{2} \text{ cm}^2 \quad (\text{直角二等辺三角形})$$

求める面積は、

$$\frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{4} = \frac{9\sqrt{3} - 9}{4} \text{ cm}^2$$

【コメント】

(2) は、やばいと思って逃げるべき。逃げなかった人が多くて、問 2, 問 3 の正答率低下につながった。

問 2 (4 点) 正答率 37.8%

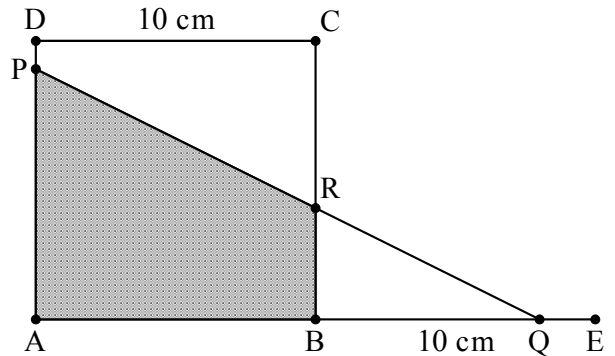
$0 \leq x \leq 5$ のとき、

$$\triangle APQ = y = \frac{1}{2} * 2x * x = x^2$$

この時点で、イかオ。なんだけど、 $5 \leq x$ のとき、明らかに重なる部分面積増えている。増えているのはイである。よって **イ**

【コメント】

真面目に考えた人が可哀想。なお、 $5 \leq x$ では以下のようになる。



$QB = 2x - 10$, $QA = 2x$, $AP = x$ で、 $\triangle QBR \sim \triangle QAP$ より、 $(2x - 10) : 2x = BR : x$ $BR = x - 5$

重なった部分の面積は、

$$\frac{1}{2} * (x + x - 5) * 10 = 5(2x - 5) = 10x - 25$$

となる。直線となるから、どちらにせよイ。

もう少し選択肢を考えるべきだった。

問 3 (1) (4 点) 正答率 39.3%

$AP = x$, $AQ = 2x$, $AB = 10$ なので、体積は

$$\frac{1}{2} * x * 2x * 10 * \frac{1}{3} = 20 \quad \text{【方程式 2 点】}$$

$$\frac{10}{3} x^2 = 20 \quad x^2 = 6 \dots \text{①} \quad \text{【1 点】}$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \sqrt{6}, \sqrt{6} \text{ cm}$$

【コメント】

明らかにサービス問題です。教科書レベル。しかし、前述の問 1 のせいで、簡単だと気づけなかった受験生が多かったと思われます。

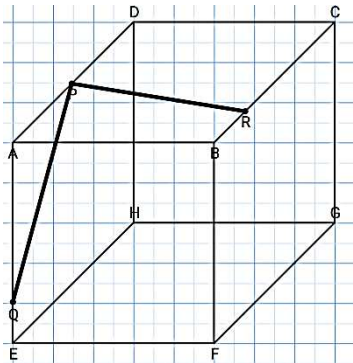
問3 (2) (4点) 正答率 9.0%

<立体切断の大原則>

1. 同一平面にある点は結んでよい。

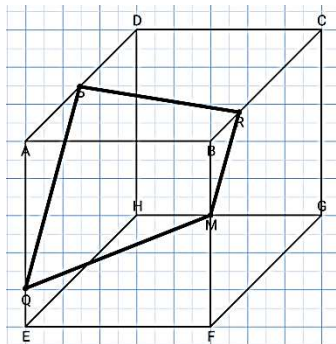
ということで、まず PQ を結ぶ。

PR も結んでよい。



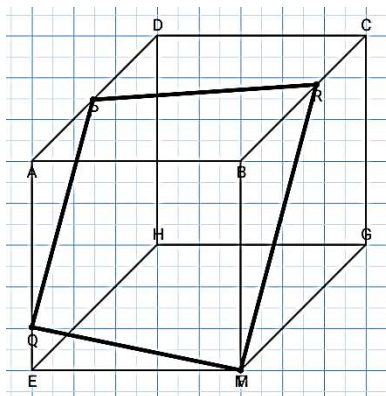
2. 向かい合う辺は平行

R から、PQ に平行な線を引く。

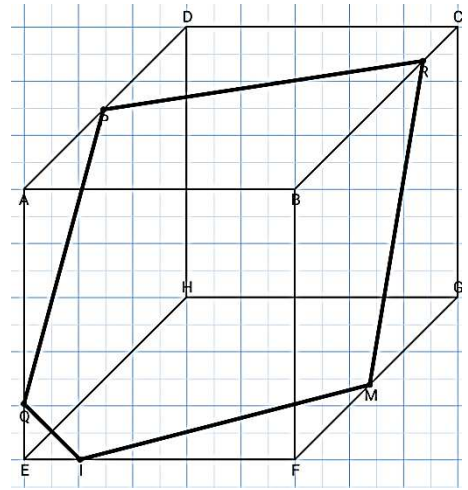


このとき、点 M が線分 BF 上にあるなら、M と Q を結べばいいだけなので、切り口は四角形となってしまう。BR=1, 2, 3, 4 のときは、明らかに BF 上にきてしまう。(AP ≥ BR だから。)

BR=5 のとき、AP:AQ=1:2 であることを考えると、BR : BM=1 : 2 となるから、BM=10 cm。ギリギリ、BF 上にあるので、四角形となる。



よって、残りの 6~9 が五角形となる。
ちなみにどうやって作図するのかと言うと、



2 まで同じ。

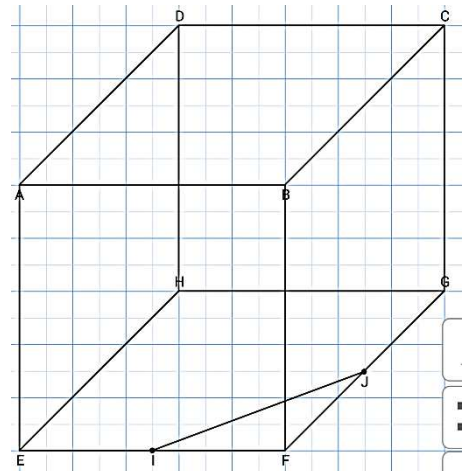
M から線分 PR に平行な線を引き、EF との交点を I とする。後は、I と Q を結べばいいだけ。ご覧のとおり、切り口が五角形となる。

4/9

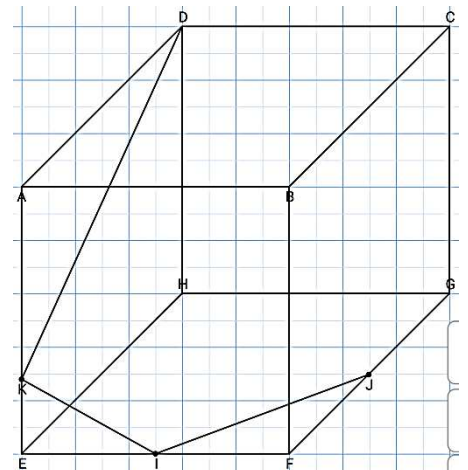
※ちなみに、同一平面にも無く、平行な線も無い場合例) 辺 EF の中点を I、辺 FG の中点を J とします。

3 点 D, I, J を通る平面で立方体を切断します。

1. まず IJ を結ぶ。

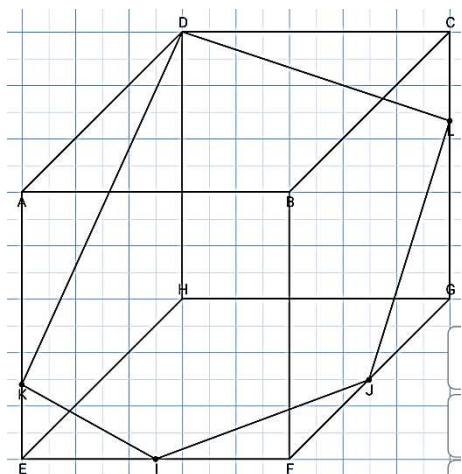


2. DI は、DI が (面を通り) 最短距離となるように。



最短距離となるように引けばよいから、このとき、 $\triangle DKA$ の $\triangle IKE$ となる。展開図を書いて、長方形 $DHFB$ を書き、一直線を引けばわかりやすい。

3, 後は、向かい合う辺と平行になるように引けばよい。



これで君も切断面マスターだ！

【コメント】

「知っていれば」瞬殺。知らない中学生が多かったと思われる。

問題が発表された当初、多くの塾の先生は「なんて簡単なんだ」と意見しましたが、問 1 (2) の難しさ、問 2 を真面目に解いてしまった、問 3 (1) を簡単だと見抜けない、問 3 (2) を知らない受験生が予想以上に多かったのか、平均点は低め。問題演習においては、難易度を見極める能力も重要になってきます。