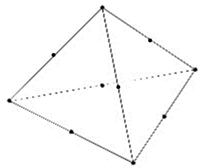
学校裁量問題の問題と解説⑨【出典：2017 年度　北海道　高校入試　過去問】

問 1　 x は自然数とします。1 辺の長さが x cm の正四面体について，各辺を x 等分する点とすべての頂点に●印をつけることとします。



　例えば，1 辺の長さが 2 cm の正四面体のときは，右の図のように●印が 10 個つきます。

(1) 1 辺の長さが 3 cm の正四面体のときにつく●印の個数を求めなさい。

(2) 1 辺の長さが x cm の正四面体のときにつく●印の個数を y 個とするとき，y を x の式で表しなさい。

問 2　1 辺の長さが a cm と b cm の 2 つの正三角形があります。この 2 つの正三角形の面積の差を $\dfrac{49\sqrt{3}}{4}$ cm^2 とします。このときの a と b の値を，次のように求めるとき，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる数を，$\boxed{}$ には解答の続きを，それぞれ書き入れて，解答を完成させなさい。

　ただし，a，b は自然数とし，$a > b$ とします。

＜解答＞

2 つの三角形の面積は，それぞれ

$\boxed{\text{ア}}\,a^2$ cm^2，$\boxed{\text{ア}}\,b^2$ cm^2 と表すことができる。

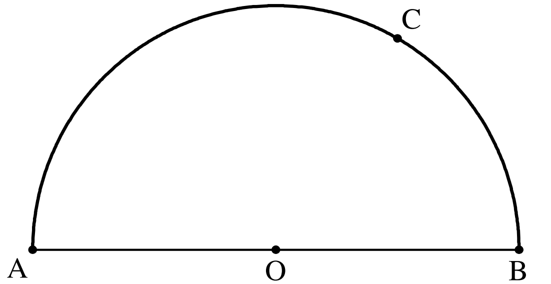
この 2 つの正三角形の面積の差は $\dfrac{49\sqrt{3}}{4}$ cm^2 なので，

$$\boxed{\text{ア}}\,a^2 - \boxed{\text{ア}}\,b^2 = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

$a^2 - b^2 = \boxed{\text{イ}}$　$(a+b)(a-b) = \boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\phantom{\text{解答欄}}}$

問 3　下の図のように，線分 AB を直径とする半円の弧 AB 上に点 C があります。線分 AB の中点を点 O とします。次の問いに答えなさい。



（1）AC＝BC とします。△ABC を，線分 AB を軸として 1 回転させてできる立体を P，半円を，線分 AB を軸として 1 回転させてできる立体を Q とします。

立体 P の体積は，立体 Q の体積の何倍ですか，求めなさい。

（2）線分 AC が線分 AB より 1 cm 短く，線分 BC が線分 AB より 2 cm 短いとき，線分 AB の長さは何 cm になりますか。

線分 AB の長さを x cm として方程式をつくり，求めなさい。

（3）線分 AB を 4 cm とします。点 C は，弧 AB 上を点 A から点 B まで移動するものとします。

∠ABC の二等分線と∠BAC の二等分線との交点を D とするとき，点 D が描いてできる線の長さを求めなさい。

ただし，点 C が点 A の位置にあるとき，点 D は点 A の位置にあり，点 C が点 B の位置にあるとき，点 D は点 B の位置にあるものとします。また，円周率はπを用いなさい。

【解答例】 配点 21 点/60 点

問 1（1）（2 点）正答率 69.4%

1 辺に 4 個●印がつく。頂点につくのを抜いて，4－2＝2 個。2×6＝12 個。頂点は，4 個あるので，12+4＝**16 個**

※計算を思いつかなくても，数えればいいだけ。

問 1（2）（3 点）正答率 47.3%

（1）のように考えると，$y=(x+1-2)\times 6+4=\mathbf{6x-2}$

【コメント】

思いつかなくても，高校入試は，1 次関数か，原点を通る 2 次関数しか出ないことを逆手にとって（※）

【1 次関数と仮定する】

$y=ax+b$とする。（2, 10）（3, 16）なので，連立方程式を解くと良い。

【原点を通る 2 次関数と仮定する】

（2, 10），（3, 18）を通る$y=ax^2$のグラフは無い。

（※これは最終手段, こういう教え方は良くない 2018 年埼玉県や道コンなどで答えがan^2+bn+c のような形になる問題も出された。）

問 2（アイ各 1 点，連立方程式 1 点，*ab* 各 1 点）正答率 8.7%

ア）$\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}$　ア）$\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{4}b^2}$

$a^2-b^2=$イ）**49**　$(a+b)(a-b)=$イ）**49**

a，b も自然数であるから，$(a+b)$も$(a-b)$自然数である。$a+b>a-b$ であるから，

$\begin{cases}a+b=49\\a-b=1\end{cases}$　これを解いて，**a＝25, b＝24**

【コメント】

北海道，整数問題好きですね。ア）イ）は常識だから埋めよう。それ以外は……なんでこんなに正答率高いのかが不思議である。

問 3（1）（3 点）　正答率 30.2%

半径 r とする。AC＝BC だから，△ABC は直角二等辺三角形。

P）おとなしく，△OAC と△OBC に分ける。体積同じなので，2 倍すれば

よい。P : $\pi r^2 \times r \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}\pi r^3$

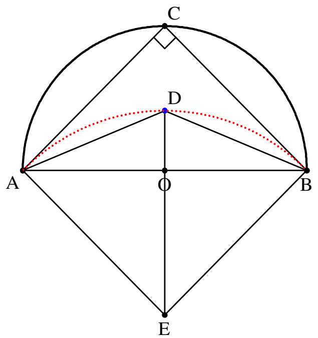
Q）ただの球なので Q : $\frac{4}{3}\pi r^3$　P は Q の $\mathbf{\frac{1}{2}}$**倍**

問 3（2）（4 点）　正答率 30.7%

△ABC は直角三角形であるから，$AB^2 = BC^2 + CA^2$

$x^2 = (x-2)^2 + (x-1)^2$【2 点】$x^2 - 6x + 5 = 0$　【1 点】
$(x-5)(x-1) = 0$　$2 < x$ であるから，$x=5$　**5 cm**【1 点】

問 3（3）4 点　正答率 3.3%



∠CAB＋∠CBA＝90°で一定で，∠OAD＋∠OBD はその半分だから，∠OAD＋∠OBD＝45°で一定。よって，∠ADB は常に 135°だから，同一円周上を動くと言える。

すると，どこかに中心がある。円の中心 E は，弦（線分 AB）の垂直 2 等分線上にあるので，直線 DO 上にある。円周角の定理より，∠ADB＝135°だから，∠AEB の大きい方の角は 135°×2＝270°より，∠AEB の小さいほうの大きさは 90°である。OB＝2 cm だから，D が動くおうぎ形の半径は，$2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm　中心角 90°なので，

$4\sqrt{2} \times \frac{90}{360} \times \pi =$ $\mathbf{\sqrt{2}\pi}$ **cm**

【コメント】

円のように動くんだろうなという認識が大事です。より詳しい解説をブログに乗せています。

【作成】高校入試　数学　良問・難問　https://hokkaimath.jp/