学校裁量問題の問題と解説⑩

【出典：2018 年度　北海道　高校入試　過去問】

問 1　ある 10 階建てのビルに 3 台のエレベーターA, B, C があり，それぞれを上昇，下降，停止させながら点検を行います。

次の（1），（2）に答えなさい。

（1）A の点検は次のように行います。

1 階から n 階まで上昇させた後，1 階まで下降させる。ただし，上昇時も下降時も 2 階から n 階の各階に 7 秒ずつ停止させる。（$3≦n≦10$）

A が階を 1 つ上昇または下降するのにかかる時間を 8 秒としたとき，A が上昇し始めてから，1 階に戻るまでの時間を n の式で表しなさい。

（2）B，C の点検は次のように行います。

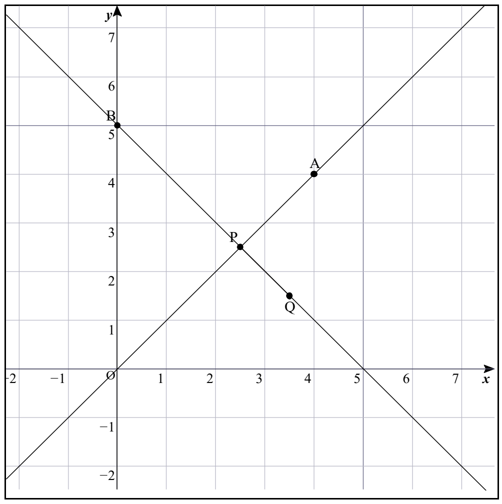
＜B＞　1 階から 10 階まで上昇させる。ただし，2 階から 9 階までの各階に 7 秒ずつ停止させる。 ＜C＞　10 階から 1 階まで下降させた後，10 階まで上昇させる。ただし，1 階にだけ 11 秒停止させ，上昇時も下降時も 2 階から 9 階には停止させない。

B，C が階を 1 つ上昇または下降するのにかかる時間は，B の方が C より 2 秒長く設定されています。B，C の点検を同時に始めたところ，10 階に同時につきました，B，C が階を 1 つ上昇または下降するのにかかる時間は，それぞれ何秒ですか。

B，C が階を 1 つ上昇または下降するのにかかる時間を，それぞれ x 秒，y 秒として，方程式を作り，求めなさい。

問 2　下の図のように，関数　$y=x$…①のグラフがあります。①のグラフ上に点 A（4, 4）をとります。点 B の座標を（0, 5）とし，線分 OA 上に点 P をとり，直線 BP 上に△OAB と△OAQ の面積の比が 5 : 2 となるように点 Q を取ります。ただし，点 Q の y 座標は，点 P の y 座標より小さいものとします。点 O は原点とします。

次の（1），（2）に答えなさい。

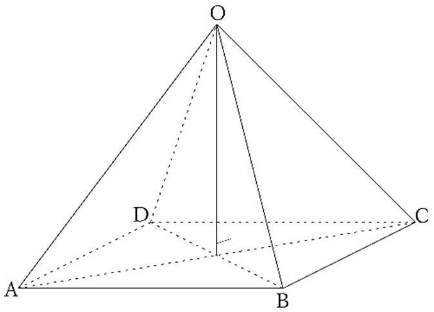


（1）点 P が点 O の位置にあるとき，点 Q の座標を求めなさい。

（2）点 P が線分 OA を点 O から点 A まで動くとき，線分 PQ が動いて出来る図形の面積を求めなさい。

問3　図1のように，1辺の長さが4 cmの正方形ABCDを底面とし，高さが$2\sqrt{2}$ cm の正四角錐 OABCD があります。次の（1），（2）に答えなさい。

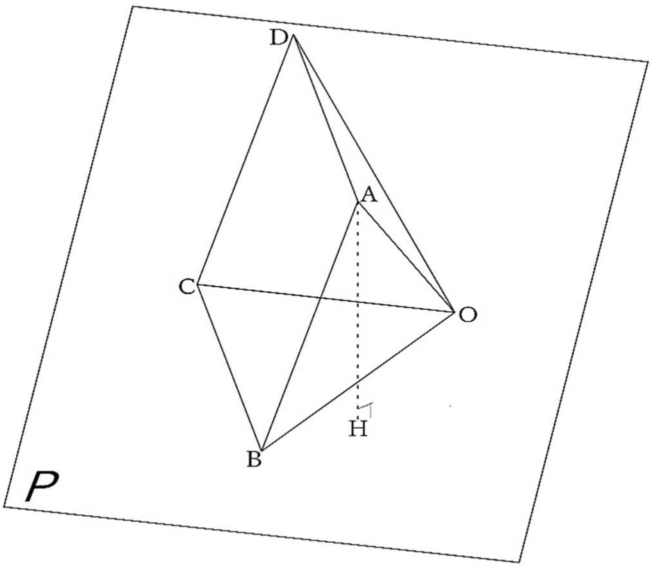
図1



（1）OA の長さを求めなさい。

（2）図2は，図1の正四角錐 OABCD を，△OBC が平面 P 上にくるようにしたものです。点 A から平面 P に垂線をひき，平面 P との交点を H とします。線分 AH の長さを求めなさい。

図2



【解答例】 配点 21 点/60 点

問 1（1）（3 点）正答率 8.4%

おとなしく図を描いて考える。

1 階 → 2 階 → 3 階 → 4 階 → …

⑧ ⑦ ⑧ ⑦ ⑧ ⑦ ⑧

1 階 ← 2 階 ← 3 階 ← 4 階 ← …

⑧ ⑦ ⑧ ⑦ ⑧ ⑦ ⑧

冷静になって自分の図を見れば気づく。

・まず，1 階から n 階までの上昇

8 秒間の上昇　（n−1）回

7 秒間の停止　（n−1）回

・次に，n 階から 1 階までの下降

8 秒間の下降　（n−1）回

7 秒間の停止

n 階では，上昇で数えているので，（n−2）回

したがって，解答は

$8(n-1)+7(n-1)+8(n-1)+7(n-2)$

$=$**$30n-37$ 秒**

問 1（2）（式 2 点・答え各 1 点）正答率 11.5%

2 秒長く設定されていることから，$x=y+2$…①はすぐ書ける。

<B の点検にかかる時間>

・1 階から 10 階まで上昇するのにかかる時間　$9x$

・停止時間　$8\times7=56$

<C の点検にかかる時間>

・下降，上昇にかかる時間　$18y$

・停止時間　11

したがって，$9x+56=18y+11$

$$\begin{cases} x=y+2\cdots① \\ 9x+56=18y+11\cdots② \end{cases}$$

①を②に代入して，$9(y+2)+56=18y+11$

$9y=63 \quad y=7 \quad x=9$

B…9 秒　C…7 秒

【コメント】

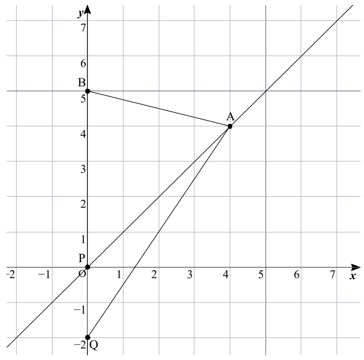
さあ，今年の裁量はどんな感じかな？？と見た受験生は，1 問目から「げっ」となったであろう。問題文が長すぎるのである。

しかし，覚えておいてほしい。「問題文が長い問題は，大抵見掛け倒し！」この問題も正答率は低いものの，よく読めば，冷静になればどうってことない問題である！

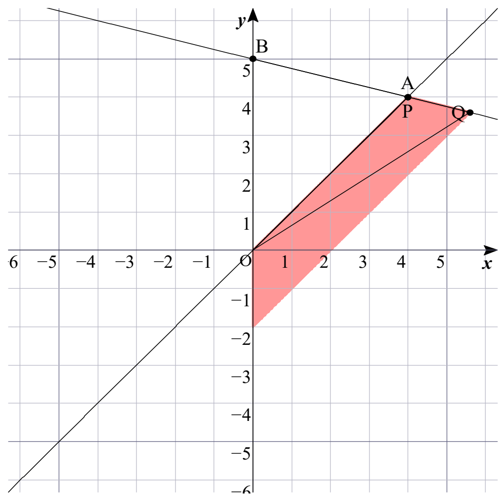
問 2（1）（3 点）正答率 22.7%

直線 BP 上に点 Q はあるから，y 軸上にある。高さ共通なので，面積は底辺の比となる。

BP：PQ＝5：2 となるから，**Q（0，−2）**



（2）（4 点）正答率 2.6%



P，Q 動いても，△OAB は変わらない。よって，△OAQ の点 Q は，辺 OA に平行な直線上を動けばよい。つまり，$y=x-2$ 上を動く。

Q は $y=x-2$ 上を動く。PQ が動いて出来る四角形の面積は，A から $y=x-2$ に y 軸に平行な線を書き，交点を C（4, 2）とする。動く前の Q を D，動き終わった後の Q を E と呼ぶと，E は，直線 AB:$y=-\frac{1}{4}x+5$ と，$y=x-2$ との交点なので，E$\left(\frac{28}{5},\frac{18}{5}\right)$。

求める面積＝平行四辺形 ODCA＋△ACE

$$=2\times4+\frac{1}{2}\times2\times\left(\frac{28}{5}-4\right)=8+\frac{8}{5}=\boldsymbol{\frac{48}{5}}$$

【コメント】

誘導にのっとって，等積変形に気づけば解ける問題だが，中々難しいと思われる。

入試の模範解答は，相似を用いてもう少し簡単に求めている。

問 3（1）（3 点）正答率 76.1%

BD＝$4\sqrt{2}$，その半分は，$2\sqrt{2}$

よって，直角二等辺三角形ができるから，

OB＝**4 cm**

問 3（2）（4 点）正答率 1.0%

三角錐 AOBC の体積は，正四角錐 OABCD の半分なので，$\frac{1}{3}\times 16\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm^3

また，三角錐 AOBC の体積は，

$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OBC}\times\mathrm{AH}$　でも求められる。

△OBC は 1 辺が 4 cm の正三角形なので，面積は，$4\sqrt{3}$ cm^{2}である。

$\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\mathrm{AH}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

$\mathbf{AH=\frac{4\sqrt{6}}{3}}$ **cm**

【コメント】

（1）は解けてほしい。（2）も実は，三角錐の体積を 2 通りで表すと言う，よく出る典型問題なのですが，最後の問題である，また今回は四角錐で表されていることから，正答率は低くなったと思われる。

この年は，理科が異常難易度でしたが，数学もなんやかんや結構な難易度でした。反動なのか？翌年は優しすぎる出題となり……。

【制作】芸術的な難問・良問数学

https://hokkaimath.blog.fc2.com/