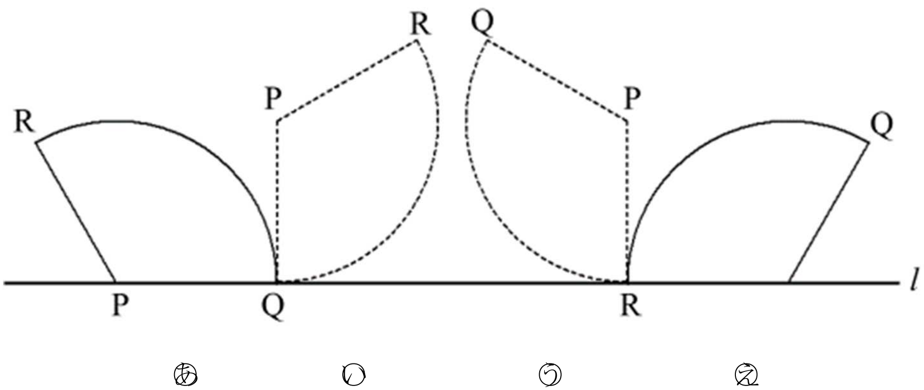
学校裁量問題と解説⑬　　【出典：2021 年度　北海道　高校入試】

問 1　次の（1），（2）に答えなさい。

（1）図 1 のあのように，直線 l 上に，半径 2 cm，中心角 120° のおうぎ形 PQR があります。おうぎ形 PQR に，次の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ の操作を順に行うことによって，点 P がえがく線の長さを求めなさい。ただし，円周率は π を用いなさい。

$\boxed{1}$	あからいまで，点 Q を中心として時計周りに 90° 回転させる。
$\boxed{2}$	いからうまで，弧 QR と直線 l が接するように，すべることなく動かす。
$\boxed{3}$	うからえまで，点 R を中心として時計回りに 90° 回転させる。

図 1



（2）図 2 のように，正三角形 ABC の頂点 A，　B，C をそれぞれ中心とし, 1 辺の長さを半径とする円の弧 BC，弧 CA，弧 AB で囲まれた図形を F とします。

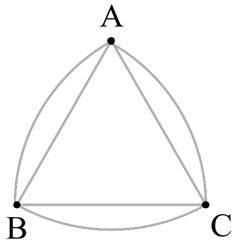


図 2　図形 F

図 3 の㋐のように, 直線 l 上に図形 F があり, 線分 BC と直線 l は垂直とします。図形 F に，次の $\boxed{1}$～$\boxed{6}$ の操作を順に行うことによって，図形 F が㋐から㋑まで動いてできる図形に色をつけて表した図として，最も適当なものを，**ア～オ**から 1 つ選びなさい。

$\boxed{1}$	点 B を中心として時計回りに 60°回転移動させる。
$\boxed{2}$	線分 CA と直線 l 上が垂直になるまで，弧 BC と直線 l が接するように，すべることなく転がす。
$\boxed{3}$	点 C を中心として時計回りに 60°回転移動させる。
$\boxed{4}$	線分 AB と直線 l 上が垂直になるまで，弧 CA と直線 l が接するように，すべることなく転がす。
$\boxed{5}$	点 A を中心として時計回りに 60°回転移動させる。
$\boxed{6}$	線分 BC と直線 l 上が垂直になるまで，弧 AB と直線 l が接するように，すべることなく転がす。

図 3

ア

イ

ウ

エ

オ

問 2　図 1 のように，1 辺が a cm の立方体 ABCD-EFGH があります。

次の（1）～（3）に答えなさい。

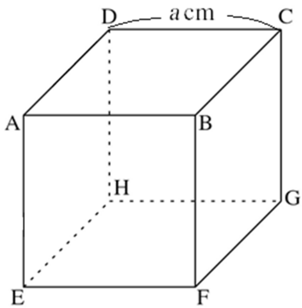
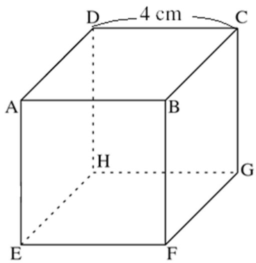


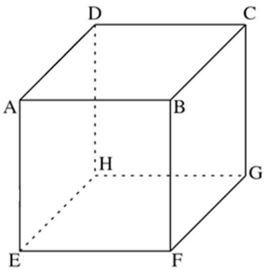
図 1

（1）図 2 は，図 1 の立方体で，$a=4$ としたものです。立方体を 3 点 A，C，G を通る平面で切ります。頂点 F をふくむ立体の体積を求めなさい。

図 2

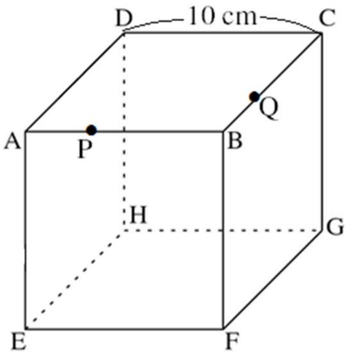


（2）図 1 の立方体を 3 点 B，E，G を通る平面で切ります。頂点 F をふくむ立体の体積は，図 1 の立方体の体積の何倍ですか，求めなさい。



（3）図 3 は，図 1 の立方体で，a＝10 としたものです。点 P，Q はそれぞれ頂点 A，B を同時に出発し，四角形 ABCD の辺上を，P は毎秒 1 cm の速さで B を通って C まで，Q は毎秒 2 cm の速さで C，D，A をとって B まで移動します。2 直線 PQ，EG が同じ平面状にある直線となるのは，点 P，Q がそれぞれ頂点 A，B を同時に出発してから，何秒後と何秒後ですか，求めなさい。

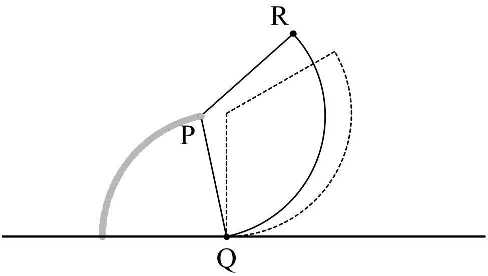
図 3



【解答・解説】

問 1（1）（5 点）

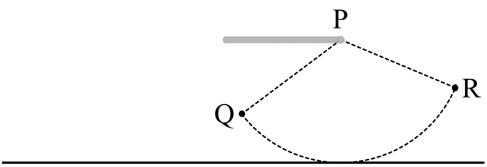
$\boxed{1}$



半径を QP とした，中心角 90° の扇形の弧を描くので,

$$4\pi \times \frac{90}{360} = \pi$$

$\boxed{2}$



弧 QR が直線 l に接しながら動くということは，**直線 l と点 P までの距離は常に 2 cm（直線 l と点 P の軌跡は平行）**ということである。点 P が動いた直線距離は，弧 QR の長さと等しいので,

$$4\pi \times \frac{120}{360} = \frac{4}{3}\pi$$

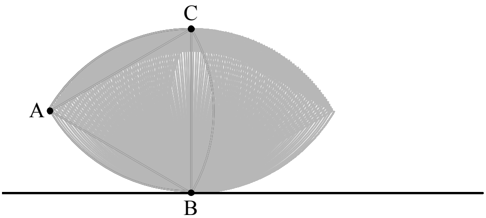
$\boxed{3}$　$\boxed{1}$と同じ　π

よって求める答えは,　$\pi + \dfrac{4}{3}\pi + \pi = \boldsymbol{\dfrac{10}{3}\pi}$ **cm**

問 1（2）（4 点）

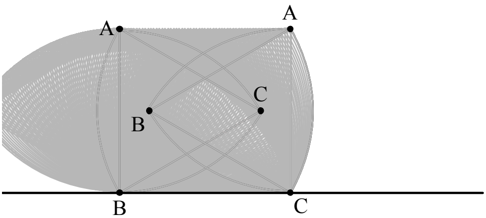
「**ルーローの三角形**」という名称がついている。

$\boxed{1}$



$\boxed{1}$では左のように動く。
この図形の端から直線 l までの距離は，BC の長さを超えないことが分かる。

$\boxed{2}$



（1）でも行ったように
この移動中，点 A と直線 l の距離は常に正三角形の一辺の長さと等しくなる（点 A の軌跡と直線 l は平行）。
以後，この$\boxed{1}$，$\boxed{2}$と同じ動作を，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$と続ける。
よって最も適当なのはウ

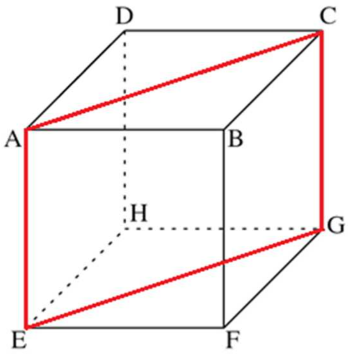
【コメント 1】

ルーローの三角形を知らなくても良いように，（1）→（2）の誘導で上手く解かせようとしている意図があると思われます（点 A が直線になる）。

勘で当たっている受験生多そう……。

北海道にしては，問題文が長めです。新入試の傾向でしょうかね，来年以降こういう問題増えるでしょう。

問 2（1）（3 点）



立方体切断方法は,

①，AC，CG を結ぶ（同一平面）

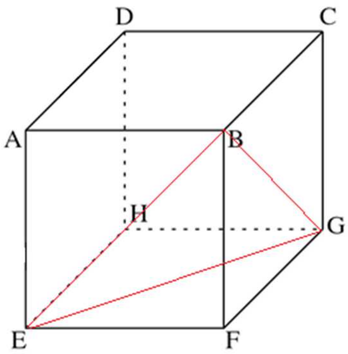
②，点 A から CG に平行な直線を引く。

③，EG を結ぶ

すると，体積は，立方体の半分。

$\frac{1}{2} \times 4^3 = \mathbf{32\ cm^3}$

問 2（2）（3 点）



3 点 B，E，G を結べばよいだけ。

すると，F が含まれる立体は三角錐となり，

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 \times a = \frac{1}{6} a^3$

となるので，この立体は立方体の体積の

$\mathbf{\frac{1}{6}}$倍

問 2（3）（5 点）

点 P，Q が頂点 A，B を出発してからの時間を x 秒とする。

2 直線 PQ，EG が同じ平面上にあるのは，PQ//EG のときである。

P が AB 上，Q が BC 上にある場合，PB＝BQ より，

$10 - x = 2x \quad x = \dfrac{10}{3} \cdots$ ①

また，Q が AB 上，P が BC 上にある場合，QB＝BP より，

$40 - 2x = x - 10 \quad x = \dfrac{50}{3} \cdots$ ②

（答え）$\dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$ **秒後，** $\dfrac{\mathbf{50}}{\mathbf{3}}$ **秒後**

部分点　①，②　各 2 点

【コメント 2】

2016 年度以来の，立方体切断問題です。切断についてより詳しい解説は，2016 年度の解説を参照してください。

https://hokkaimath.jp/blog-entry-88.html

【予想正答率】

問 1（1）30%

問 1（2）50%　（真面目に当てる 30%＋勘で 20%　ぐらい？）

問 2（1）80%

問 2（2）90%

問 2（3）5%

【コメント 3】

今年度は，某感染症の影響で，相似以降カットという，珍しい入試でした。そのため，この（建前上）難問が出題される学校裁量問題で，難問が作成しやすい三平方や相似がなくなり，中学入試みたいな問題となりました。

この問題, 全て小学校～中 1 範囲です。簡単という訳ではありませんが。何と言うか，塾通っている中学生がかなり有利ですよね。軌跡，立方体切断，どれも一般的な公立中学校ではほとんど扱ってくれません。問題自体は面白いですが，入試としてはあまり好きではないですね。まだ難易度が控えめなのが幸いですが。

来年度からは, 裁量問題も廃止され, 一律の入試問題となります。また, 60 点満点から 100 点満点となります。

なんとなく,

大問 1 : 計算などの簡単な問題　25 点ぐらい

大問 2 : 最近流行りのやたら問題文長い問題　18 点ぐらい

（この大問の配点上がると思われ）

大問 3 : 関数（これは譲らないと思う）　18 点ぐらい

大問 4 : 証明と平面図形　15 点ぐらい

（計算問題の難易度がアップすると思われる）

大問 5 : 今の裁量問題で出題されている難しめの問題　24 点ぐらい

現行の裁量問題と標準問題を足して 2 で割り，大問 2 の比率が上がるような，そんな入試問題になる気がします。あくまでも推測。