最終手段座標設定　　　　　　得点　　　　/60

【出典：2016 年度　北海道大学　数学 2B】

△ABC が，AB＝2，AC＝$1+\sqrt{3}$，∠ACB＝45° をみたすとする。

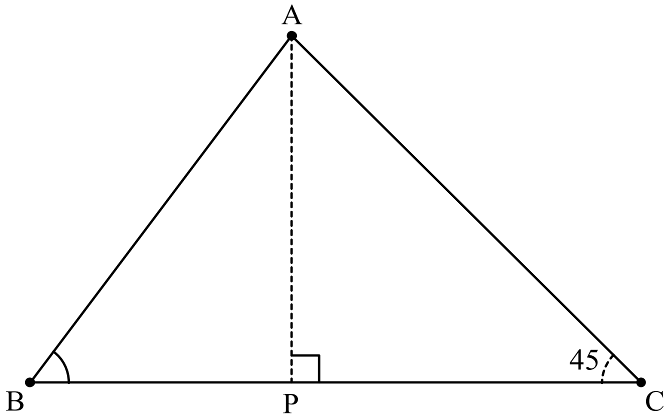
(1) $\beta=\angle\mathrm{ABC}$とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2) (1) の β の値を全て求めよ。

(3) △ABC の外接円の中心を O とする。△ABC が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$をみたす実数 s，t を求めよ。

【解答例】

(1)



図より，

$$\mathrm{AP}=\frac{\mathrm{AC}}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2}$$

$\mathrm{AB}\sin\beta=\mathrm{AP}$ より， $\sin\beta=\dfrac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

$$\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-\frac{1}{8}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2)

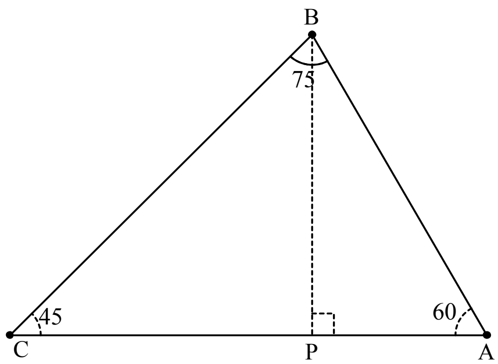
$0<\beta<\pi$より，$0<2\beta<2\pi$であるから，

(1)より，$2\beta=\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi$

$\boldsymbol{\beta=75^\circ, 105^\circ}$

(3)

【最終手段の解答】



△ABC は鋭角三角形なので，$\beta=\dfrac{5}{12}\pi=75^\circ$となり，

∠BAC＝60° となる。このとき，CB＝$\sqrt{3}$となる。
図より，xy 平面で，C を原点とすると，

$\mathrm{A}\left(1+\sqrt{3},0\right),\mathrm{B}\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$となる。

点 O は 3 点 A，B，C を通る円の中心である。この円は，$x^2+y^2+ax+by=0$ と表せ，
A の座標を代入し，

$4+2\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)a=0\cdots$①

B の座標を代入し，
$6+\sqrt{3}(a+b)=0\cdots$②
①より，

$$a=-\frac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-\frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$

$=-\dfrac{2\sqrt{3}+2}{2}=-\sqrt{3}-1$ であるので，②に代入し，

$$6+\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}-1+b\right)=6-3-\sqrt{3}+\sqrt{3}b=0$$

$$b=\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}$$

よって，$x^2+y^2+\left(-1-\sqrt{3}\right)x+\left(1-\sqrt{3}\right)y=0$

$\mathrm{O}\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$となる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2},\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とすると，

$\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}s+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}t\cdots$①

$\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}=\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}s+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}t\cdots$②

①＋②より，$-\sqrt{3}=s+\sqrt{3}t$
①－②より，$-1=\sqrt{3}s-t$
この連立方程式を解いて，

$\boldsymbol{s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，$\boldsymbol{t=-\dfrac{1}{2}}$

【コメント】

有名角が出てきて，ベクトル，複素数平面等分からなかったら，最終手段座標設定があります。