

激ムズ食塩水

範囲：小問集合

難易度：★×6

得点

/20

出典：2022 年度 灘高校

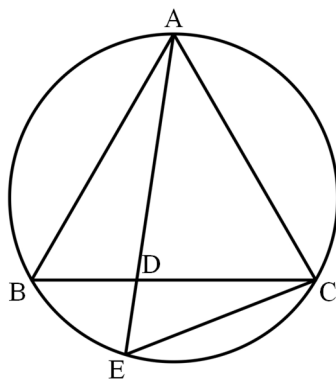
次の□内に適する数または式を記入せよ。

$$(1) \left(\sqrt{2022} + \sqrt{77}\right)^2 - 2\left(\sqrt{2022} + \sqrt{77}\right)\left(\sqrt{2022} - 1\right) \\ + 2\left(\sqrt{2022} - \sqrt{77}\right)\left(\sqrt{2022} - 1\right) - \left(\sqrt{2022} - \sqrt{77}\right)^2$$

を計算すると□である。

- (2) サイコロ A とサイコロ B を投げ、A の出た目の数を a 、B の出た目の数を b とする。 x の 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ がただ 1 つの解をもつ確率は□であり、この方程式が異なる 2 つの整数の解をもつ確率は□である。

- (3) $\triangle ABC$ は正三角形で、図のように円に内接している。 $AD = 4\sqrt{7}$ 、 $BD = 4$ のとき、 $DE = \square$ であり、 $\triangle ABC$ の 1 辺の長さは□である。



- (4) ある容器に 15%食塩水が 200 g 入っている。この容器から x g の食塩水を取り出し、そのかわりに x g の水を加えた。さらに続けて、この容器から $2x$ g の食塩水を取り出し、そのかわりに $2x$ g の水を加えた。このとき、食塩水に含まれる食塩の質量を x を用いて表すと、□g であり、この食塩水の濃度が 7.2%であるとき、 $x = \square$ である。

【解答例】

(1) (4点) 都合の良い順番で計算する。良い感じに消えまくる。

$$\left(\sqrt{2022} + \sqrt{77}\right)^2 - \left(\sqrt{2022} - \sqrt{77}\right)^2 = 4\sqrt{2022} \cdot \sqrt{77}$$

$$-2\left(\sqrt{2022} + \sqrt{77}\right)\left(\sqrt{2022} - 1\right) + 2\left(\sqrt{2022} - \sqrt{77}\right)\left(\sqrt{2022} - 1\right)$$

$$= -4\sqrt{77}\left(\sqrt{2022} - 1\right) = -4\sqrt{2022} \cdot \sqrt{77} + 4\sqrt{77}$$

よって計算すると答えは **$4\sqrt{77}$**

(2) (3点×2)

ただ1つの解をもつとき、因数分解したとき $(x-c)^2$ となりこれを展開すると、 $x^2 - 2cx + c^2$ となるから、 $a = 2c$, $b = c^2$, すなわち、

$b = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}a^2$ となればよい。これを満たす $(a, b) = (2, 1), (4, 4)$ の2通り

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

異なる2つの整数の解をもつとき、 α, β を整数解とし、

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

b	$\alpha\beta$	$\alpha + \beta$	a
1	1×1	1+1	2
2	2×1	2+1	6
3	3×1	3+1	4
4	4×1, 2×2	4+1, 2+2	5, 4
5	5×1	5+1	6
6	6×1 , 3×2	6+1 , 3+2	7 , 5

$b=1, 2, 3, 4, 5, 6$ なので、
どうせ少ないので左のように
表を書く。5通りと分かるの
で、

$$\frac{5}{36}$$

異なるなので重解はだめ！

【コメント】 (1), (2) は頑張って解いて。(3) は思いつかなかつたら地獄です。(4) は思いつくでしょうが計算が不安になります。最後の因数分解も大変。激ムズ。

(3) (2点×2)

∠DFB=90° となる点 F を辺 AB 上にとる。

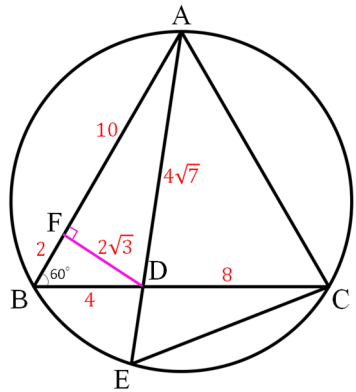
∠FBD=60° , BD=4 より, BF=2,

DF=2√3, よって AF=√(112-12)=10

△ABC の1辺の長さは **12**

△DBA∽△DEC, DC=8 だから,

$$4:4\sqrt{7} = DE:8 \quad DE = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$



(4) (3点×2)

①, 1 回目の入れ替え

200 g 15%食塩水に塩 30 g

$$\downarrow \times \frac{x}{200}$$

x g 15%食塩水には塩 $\frac{3}{20}x$ g

そのかわりに x g の水を加えたあとの塩の量は, $30 - \frac{3}{20}x$

→

答案にはどれか式書いてあれば良いはず

②, 2 回目の入れ替え

200 g で塩 $30 - \frac{3}{20}x$ g

$$\downarrow \times \frac{x}{100}$$

2x g で塩 $\frac{x}{100}(30 - \frac{3}{20}x)$

そのかわりに 2x g の水を加えたあとの塩の量は,

$$30 - \frac{3}{20}x - \frac{x}{100}\left(30 - \frac{3}{20}x\right)$$

$$= \left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(30 - \frac{3}{20}x\right)$$

$$= \frac{3}{2000}(100-x)(200-x)$$

200 g 7.2%食塩水に塩 14.4 g 入っているので,

$$\frac{3}{2000}(100-x)(200-x) = 14.4 \quad 3(100-x)(200-x) = 144 \times 200$$

$$(100-x)(200-x) = 48 \times 200 \quad \text{整理して, } x^2 - 300x + 52 \times 200 = 0$$

$$x^2 - 300x + 10400 = 0 \quad (x-40)(x-260) = 0 \quad 0 < x < 100 \text{ より, } x = \mathbf{40}$$

※104=26×4 なので, こういう問題だし無理やり因数分解できないか考えればたぶんいける。

【作成】 高校入試 数学 良問・難問 <https://hokkaimath.jp/>